

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1 (5 points)

On considère la suite U_n définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{2}{1+U_n} \end{cases}$$

1/a. Calculer U_1 et U_2 .

b. En déduire que U_n n'est ni arithmétique ni géométrique

c. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 3$.

d. Montrer que la suite U_n est décroissante. Que peut-on déduire ?

2/ On considère la suite V_n définie sur \mathbb{N} par : $V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 2}$

Montrer que V_n est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$

3/a. Exprimer V_n puis U_n à l'aide de n .

b. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

4/ Soit $S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$

Montrer que $S_n = \frac{8}{15} [1 - (-\frac{1}{2})^n]$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

EXERCICE 2 (5 points)

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère la droite D passant par $A(1, -1, 2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$

1) Donner une représentation paramétrique de la droite D .

2/ Soit Δ la droite définie par :
$$\begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 2\alpha \\ z = 1 + 3\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

Montrer que D et Δ se coupent au point $I(3, 1, -2)$.

3/ Soit P le plan qui contient D et Δ . Déterminer une équation cartésienne de P .

4/ Soit Q le plan dont une équation cartésienne est : $7x - y + 3z - 1 = 0$

Montrer que P et Q sont parallèles.

5/ Soit H le projeté orthogonal de I sur Q .

Déterminer les coordonnées de H puis déduire la distance de I à Q .

EXERCICE 3 (5 points)

Une urne contient **dix** jetons repartis comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{quatre jetons blancs numérotés : } 0, 1, 2, -1 \\ \text{trois jetons rouges numérotés : } -1, 1, 0 \\ \text{trois jetons noirs numérotés : } -1, -1, 1 \end{array} \right.$$

1/ On tire simultanément trois jetons de l'urne.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A « les jetons tirés sont de même couleur »

B « la somme des numéros portés par les jetons tirés est nulle »

C « obtenir un seul jeton rouge et un seul portant le numéro 1 »

2/ On tire successivement et avec remise quatre jetons de l'urne.

Calculer la probabilité des événements suivants :

D « les jetons tirés portent le même numéro »

E « le produit des numéros portés par les quatre jetons est égale à 2 »

G « obtenir au moins un jeton blanc »

3/ On tire maintenant tous les jetons un à un jusqu'à ce que l'urne soit vide.

Calculer la probabilité de l'événement suivant :

F « le premier jeton tiré est rouge, le deuxième porte le numéro 2 »

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1/ a. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b. Vérifier que f est de période π .

c. Etudier la parité de f . Interpréter le résultat graphiquement.

d. Soit n un entier naturel. Montrer que les points $A_n(\frac{n\pi}{2}, 0)$ sont des points de symétrie pour C_f .

2/a. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x)$ et interpréter les résultats graphiquement.

b. Montrer que f est dérivable sur D_f et calculer $f'(x)$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur $]0, \pi[$.

d. Tracer la courbe C_f de f sur un intervalle de longueur 2π .

3/a. Soit $g(x) = f(x)$ pour tout réel x de $]0, \pi[$.

Tracer la courbe C' symétrique de C_g par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

b. On désigne par h la fonction correspond à la courbe C'

Déterminer graphiquement $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$