Devoir de synthèse:n°2
Durée : $3H$

Prof: Talbi Rachid
Le 23 / 05 /2017

EXERCICE ❶ (5pts)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = & 1 \\ u_{n+1} = & u_n + 2n + 3 \end{cases}$

1. (a) Calculer u_1 et u_2
   (b) La suite (u_n) est elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > n^2$
   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = (n+1)^2$
5. Déterminer la limite (éventuelle) des suites (v_n) ci-dessous:

   $a)\ v_n = \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ $\qquad b)\ v_n = -3 \times 2^n$ $\qquad c)\ v_n = \frac{3^n+2}{5^n-1}$

EXERCICE ❷ (5pts)

Partie I

On jette trois dés cubiques équilibrés X, Y et Z dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
calculer la probabilité d'obtenir:
A " Exactement un 1"
B " Au moins un 1"
C " Trois nombres distincts"
D " Au moins deux nombres identiques"
E " Exactement deux nombres identiques"
F " Une somme de points pair"

Partie II

Soient A et B deux événements indépendants tels que $p(A) = 0.2$ et $p(B) = 0.4$
Calculer les probabilités ci-dessous.
$p(A \cap B)$, $p(A \cup B)$, $p(A \cap \overline{B})$ et $p(\overline{A} \cap B)$

Partie III

1. Exprimer en fonction de n et sans factorielle les nombres :

   $a = \frac{(n+2)!}{n!}$ $\qquad b = \frac{C_{n+1}^p}{C_n^p}$ $\qquad$ et $\qquad c = \frac{(2n+2)!}{(2n-1)!}$

2. Résoudre dans $\mathbb{N}$ chacunes des équations suivantes:

   $a)\ C_n^2 = 36$ $\qquad b)\ C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \frac{7}{2}n$

EXERCICE ❸ (5pts)

Le tableau suivant donne la dépense,en millions de dinars,des ménages en produits informatiques (matériels,logiciels,réparations) de 1990 à 1999.

Année	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Rang X_i de l'année	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dépense Y_i	398	451	423	501	673	956	1077	1285	1427	1490

1. (a) Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X.
   (b) Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart-type σ_Y de la variable Y

2. (a) Représenter le nuage de points de la série (X_i, Y_i) dans un repère orthogonal.
      i. sur l'axe des abscisses: $1cm$ *pour un rang*
      ii. sur l'axe des ordonnées: $1cm$ *pour* 200 *millions de dinars*
   (b) Comment semble se répartir les points du nuage ?
   (c) Placer le point moyen G.

3. G_1 désigne le point moyen des 5 premiers points du nuage et G_2 celui des 5 derniers points.
   (a) Déterminer les cordonnées G_1 et G_2.
   (b) Sur le graphique précédent, tracer la droite (G_1G_2).

4. (a) Déterminer une équation de (G_1G_2) de la forme: $Y = aX + b$ (a et b sont arrondies à 0.1 prés)
   (b) Calculer la somme des carrés des résidus pour cet ajustement : $S = \sum_{i=0}^{9} [Y_i - (aX_i + b)]^2$.
   (c) Interpréter ce résultat.

5. En utilisant cet ajustement,donner une estimation sur les dépenses de l'année 2005.

EXERCICE ❹ ($5pts$)

l'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$,soient les points $A(1,1,1), B(1,2,3)$ et $C(0,0,1)$.

1. (a) Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
   (b) Placer les points A, B et C.

2. (a) Vérifier que $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne de (ABC).

3. Vérifier que le point $D(0,2,1) \notin (ABC)$.

4. Soit $H(x_0, y_0, z_0)$ le projeté orthogonal de D sur (ABC).
   (a) Justifier l'existance d'un réel k tel que $\overrightarrow{DH}\begin{pmatrix} 2k \\ -2k \\ k \end{pmatrix}$
   (b) Déterminer les coordonnées de H.

5. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ABC).