

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION	<b>SESSION                  DE                  CONTROLE</b>	<b>EXAMEN DU BACCALAURÉAT                  SESSION DE JUIN 2009</b>
<b>SECTION : SCIENCES TECHNIQUES</b>		
<b>EPREUVE : MATHÉMATIQUES</b>	<b>DURÉE : 3 Heures</b>	<b>COEFFICIENT : 3</b>

**Exercice 1 : QCM (3 points)**

*Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.  
 Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.  
 Aucune justification n'est demandée.  
 Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse vaut 0 point.*

1) La forme exponentielle du nombre complexe  $-\sqrt{3} - i$  est

a)  $2e^{+\frac{\pi}{6}}$

b)  $2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

c)  $2e^{+\frac{5\pi}{6}}$

2) Si  $z$  est un nombre complexe alors le conjugué de  $1 + iz^2$  est

a)  $1 - iz^2$

b)  $1 - i\bar{z}^2$

c)  $-1 - iz^2$

3) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$ . Le module du nombre complexe  $z = 1 + e^{i\theta}$  est égal à

a)  $1 + |e^{i\theta}|$

b)  $\sqrt{2}$

c)  $\sqrt{2(1 + \cos\theta)}$

4) Soit  $A$  et  $B$  deux événements tels que :  $p(A \setminus B) = \frac{1}{4}$  ;  $p(A \setminus \bar{B}) = \frac{1}{3}$  et  $p(B) = \frac{1}{2}$

Alors

a)  $p(A) = \frac{7}{12}$

b)  $p(A) = \frac{7}{24}$

c)  $p(A) = \frac{1}{2}$

**Exercice 2 (6 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1) a) Vérifier que  $8 - 6i = (3 - i)^2$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $z^2 + (1 + i)z - 2(1 - i) = 0$ .

2) Soit  $\theta$  un réel de  $[0, \pi]$

On considère l'équation :  $(E_\theta) : z^2 + (1 + e^{i\theta})z - 2(1 - e^{i\theta}) = 0$ .

a) Vérifier que  $(-2)$  est une solution de  $(E_\theta)$ .

b) Déterminer l'autre solution de  $E_\theta$ .

3) Soient  $A$  et  $M_\theta$  les points d'affixes respectives  $-2$  et  $1 - e^{i\theta}$ ;  $\theta \in [0, \pi]$ .

a) Calculer  $AM_\theta$  en fonction de  $\theta$ .

b) Déterminer la valeur de  $\theta$  de  $[0, \pi]$  pour laquelle  $AM_\theta$  est maximale.

### Exercice 3 : ( 5 points )

Un nourrisson est pesé quotidiennement durant le 1<sup>er</sup> mois de sa naissance.

Dans le tableau statistique ci-dessous, la variable  $X$  désigne le nombre de jours après la naissance de nourrisson, et la variable  $Y$  le poids en kilogrammes.

X (en jours)	4	6	9	14	17	19	22
Y (en kg)	3,6	3,75	3,80	3,90	4	4,25	4,5

1) a) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage de points associé à la série  $(X, Y)$ .

b) Un ajustement affine de cette série est-il justifié ?

2) a) Calculer la moyenne  $\bar{X}$  et l'écart type  $\sigma_X$  de la variable  $X$ .

b) Calculer la moyenne  $\bar{Y}$  et l'écart type  $\sigma_Y$  de la variable  $Y$ .

3) a) Calculer le coefficient de corrélation entre  $X$  et  $Y$ .

b) Interpréter le résultat trouvé.

4) a) Calculer la covariance du couple  $(X, Y)$ .

b) En déduire qu'une équation de la droite de régression de  $Y$  en  $X$  est  $Y = 0,04x + 3,41$ .  
(les coefficients sont donnés à 0,01 près).

5) a) Quelle pourrait être une estimation du poids du nourrisson après 30 jours de sa naissance ?

b) Quel pourrait être l'âge du nourrisson sachant que son poids est 3,85 Kg ?

**Exercice 4 (6 points)**

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-x})$ .

On désigne par  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{2} \frac{1}{1+e^x}$ .
- b) Etudier les variations de  $f$ .
- c) Vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \ln(1+e^x)$ .
- d) En déduire que la droite  $\Delta : y = -\frac{1}{2}x$  est une asymptote à  $\mathcal{C}_f$  en  $-\infty$ .

Etudier la position relative de  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta$ .

- e) Tracer  $\mathcal{C}_f$  et  $\Delta$ .
- 2) a) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha$ .
  - b) Vérifier que  $0 < \alpha < 1$ .
- 3) a) Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ .
  - b) En déduire que pour tout  $x \geq 0$ ,  $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{4} |x - \alpha|$ .

- 4) Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \geq 0$ .
- b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |u_n - \alpha|$ .
- c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .
- d) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .