

**EXAMEN DU BACCALAUREAT**  
**SESSION DE JUIN 2011**

**SESSION**  
**PRINCIPALE**

**SECTION : SCIENCES TECHNIQUES**  
**EPREUVE : MATHÉMATIQUES**

**DURÉE : 3 heures**

**COEFFICIENT : 3**

**Exercice 1 (3 points)**

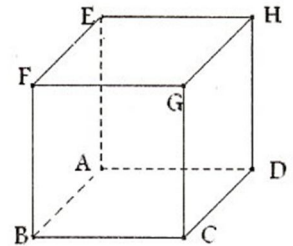
Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.  
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.  
Aucune justification n'est demandée.  
Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) La fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln x - x$  est  
a) croissante sur  $]0, +\infty[$     b) décroissante sur  $]0, +\infty[$     c) n'est pas monotone sur  $]0, +\infty[$ .

- 2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - 1}$  est égale à :  
a) 0                                      b) 2                                      c) 1

- 3) La figure ci-contre est celle d'un cube  $ABCDEFGH$  d'arête 1.

- i)  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$  est égal à :  
a)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                                       b) 1                                      c)  $\sqrt{2}$
- ii)  $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$  est égal à :  
a)  $\overline{AE}$                                       b)  $\overline{EA}$                                       c)  $\frac{\sqrt{2}}{2} \overline{AE}$



**Exercice 2 (6 points)**

- 1) Soit la suite réelle  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n}; \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$
  
a) Calculer  $u_1$  et  $u_2$ .  
b) Montrer, par récurrence, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 < u_n < 3$ .
- 2) Soit la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$ .

- a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{4}$ .
- b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- c) Calculer la limite de la suite  $(u_n)$ .
- 3) On considère la suite  $(w_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $w_n = \frac{3}{u_n}$  et on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n w_k$ .
- a) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_n = 1 - v_n$ .
- b) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)$ .
- c) Calculer la limite de  $\frac{S_n}{n}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

### Exercice 3 (5 points)

- 1) Montrer que  $i e^{i\frac{\pi}{6}} = \left( e^{i\frac{\pi}{3}} \right)^2$ .
- 2) Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation
- $$(E) : z^2 - 2(e^{i\frac{\pi}{12}})z + (1-i)e^{i\frac{\pi}{6}} = 0.$$
- 3) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $e^{i\frac{\pi}{3}}$ ,  $e^{i\frac{\pi}{12}}$  et  $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{12}}$ .

- a) Montrer que le quadrilatère  $OACB$  est un losange.
- b) Placer les points les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .
- c) Calculer l'aire du losange  $OACB$ .

### Exercice 4 (6 points)

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = (1+x)e^{-x}$ .

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- 1) a) calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- b) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = -x e^{-x}$ .
- c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- b) Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ .
- 3) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On désigne par  $\mathcal{A}_n$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(\mathcal{C})$ , les axes du repère et la droite  $D$  d'équation  $x = n$ .
- a) A l'aide d'une intégration par parties, calculer  $\mathcal{A}_n$  en fonction de  $n$ .
- b) Calculer  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{A}_n$ .