

REPUBLIQUE TUNISIENNE ◆◆◆ MINISTRE DE L'EDUCATION	EXAMEN DU BACCALAUREAT SESSION DE JUIN 2012		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 3h	Coefficient : 3
SECTION : Sciences Techniques		SESSION PRINCIPALE	

Le sujet comporte 4 pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 (3points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
 Le candidat indiquera sur sa copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie.
 Aucune justification n'est demandée.

Une réponse correcte vaut 0,75 point, une réponse fautive ou l'absence de réponse vaut 0 point.

- 1) La forme algébrique du nombre complexe $\sqrt{3} \cdot e^{i\frac{\pi}{6}}$ est
- a) $\frac{3-i\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{3+i\sqrt{3}}{2}$
- 2) Un argument du nombre complexe $(1-i\sqrt{3})i$ est
- a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{-\pi}{3}$
- 3) Le module du nombre complexe $1+e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est égal à
- a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2
- 4) L'ensemble des points M d'affixe z tels que $(z-i)(\bar{z}+i)=1$ est
- a) un singleton. b) une droite. c) un cercle.

Exercice 2 (6points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points A(2, 1, 1) ; B(1, 1, 0) et C(1, 0, 1).

- 1) a) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan que l'on notera P.
 b) Vérifier que $x - y - z = 0$ est une équation cartésienne du plan P.
- 2) Soit le point D (2,0,0) .
- a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
 b) Calculer le volume \mathcal{V} du tétraèdre ABCD.

3) Soit $I \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$. On désigne par (S) la sphère de centre I et passant par D.

- Montrer que la sphère (S) passe par les points A et B.
- En déduire que le plan P coupe la sphère (S) suivant un cercle (\mathcal{C}).
- Justifier que (\mathcal{C}) est circonscrit au triangle ABC.

4) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan P.

- Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ .
- Déterminer les coordonnées du point Ω centre du cercle (\mathcal{C}).
- Soit D' le symétrique de D par rapport à Ω .

Montrer que le volume \mathcal{V}' du tétraèdre D'ABC est égal à \mathcal{V} .

Exercice 3 (5 points)

Le tableau de variation suivant est celui de la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2 - x + \ln x .$$

x	1		$+\infty$
f'(x)	0	-	
f	1		$-\infty$

- Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]1, +\infty[$ une unique solution notée α et que $\ln \alpha = \alpha - 2$.
 - En déduire le signe de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

2) Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2 + \ln u_n ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- Montrer que pour tout entier naturel n ; $1 \leq u_n \leq \alpha$.
- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.
- En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 4 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe, on a représenté dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) la courbe (C) d'une fonction f définie, continue, dérivable et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$.

On sait que la courbe (C) :

- admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $+\infty$,
- atteint son maximum au point d'abscisse 0.

1) Par lecture graphique :

a) Déterminer $f(0)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $f'_d(0)$ (nombre dérivé à droite de f en 0)

b) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Tracer dans l'annexe la courbe (C') de la fonction f^{-1} réciproque de f .

On note β l'abscisse du point d'intersection des deux courbes (C) et (C').

3) On sait que la fonction f est définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = (ax + b)e^{-2x}$ où a et b sont deux réels.

a) En utilisant 1) a) montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = (2x + 1)e^{-2x}$

b) Soit $I = \int_0^{\beta} (2x + 1)e^{-2x} dx$.

A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = 1 - (\beta + 1)e^{-2\beta}$.

c) On désigne par \mathcal{A} l'aire de la partie (E) du plan limitée par la courbe (C'), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \beta$ et $x = 1$.

Hachurer (E) et déterminer \mathcal{A} en fonction de β .

Epreuve : Mathématiques - Section : Sciences Techniques

Annexe (à rendre avec la feuille de copie)

