

Mathématiques
Sciences Techniques
Corrigé de la session de contrôle Juin 2013

Exercice 1

1) (P): $x + y - z - 3 = 0$

$A(2, 1, 0)$; $2 + 1 - 0 - 3 = 0$; d'où $A \in (P)$.

$B(2, -1, -2)$; $2 + (-1) - (-2) - 3 = 0$; d'où $B \in (P)$.

$C(0, 1, -2)$; $0 + 1 - (-2) - 3 = 0$; d'où $C \in (P)$.

Ainsi les points A, B et C appartiennent au plan (P).

2) a) $M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 4z + 5 = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 + 4z + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-1)^2 - 1 + (z+2)^2 - 4 + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4.$$

D'où (S) est la sphère de centre $I(2, 1, -2)$ et de rayon $R = 2$.

b) (S): $(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 4$.

$A(2, 1, 0)$; $(2-2)^2 + (1-1)^2 + (0+2)^2 = 4$; d'où $A \in (S)$.

$B(2, -1, -2)$; $(2-2)^2 + (-1-1)^2 + (-2+2)^2 = 4$; d'où $B \in (S)$.

$C(0, 1, -2)$; $(0-2)^2 + (1-1)^2 + (-2+2)^2 = 4$; d'où $C \in (S)$.

Ainsi les points A, B et C appartiennent à la sphère (S).

Les points A, B et C appartiennent aussi au plan (P), donc (P) et (S) se coupent suivant le cercle (C) circonscrit au triangle ABC.

c) $AB = \sqrt{(2-2)^2 + (-1-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$AC = \sqrt{(0-2)^2 + (1-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(0-2)^2 + (1-(-1))^2 + (-2-(-2))^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$AB = AC = BC$, d'où ABC est un triangle équilatéral.

3) a) La droite Δ est perpendiculaire au plan (P) donc le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, qui est un vecteur

normal au plan (P), est un vecteur directeur de la droite Δ . On a aussi $I(2, 1, -2) \in (P)$.

$$\text{D'où un système paramétrique de } \Delta \text{ est : } \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -2 - \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } G(x, y, z) \in \Delta \cap (P) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -2 - \alpha \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -2 - \alpha \\ 2 + \alpha + 1 + \alpha - (-2 - \alpha) - 3 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -2 - \alpha \\ \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{D'où } G\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

$$\text{c) } A(2, 1, 0) ; B(2, -1, -2) ; C(0, 1, -2) \text{ et } G\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right).$$

$$\overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix} ; \overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-4}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix} ; \overrightarrow{GC} \begin{pmatrix} -4 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-2}{3} \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, d'où G est le centre de gravité du triangle ABC.

d) On a ABC est un triangle équilatéral de centre de gravité G et (C) son cercle circonscrit, d'où le cercle (C) est de centre G et de rayon GA.

$$GA = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{24}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

(C) est le cercle de centre G et de rayon $\frac{2}{3}\sqrt{6}$.

Exercice 2

1) f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x e^{1-x}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } x \geq 1 &\Rightarrow 1-x \leq 0 \\ &\Rightarrow e^{1-x} \leq e^0 \text{ ; car la fonction } x \mapsto e^x \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} . \\ &\Rightarrow e^{1-x} \leq 1 \\ &\Rightarrow x e^{1-x} \leq x \\ &\Rightarrow f(x) \leq x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq x-1 \leq 0 \\ &\Rightarrow 0 \leq 1-x \leq 1 \\ &\Rightarrow e^0 \leq e^{1-x} \leq e^1 \\ &\Rightarrow 1 \leq e^{1-x} \\ &\Rightarrow x \leq x e^{1-x} \\ &\Rightarrow x \leq f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f'(x) &= e^{1-x} + x.(e^{1-x})' \text{ ; } x \in [0, +\infty[\\ &= e^{1-x} + x.(-1)e^{1-x} \\ &= (1-x)e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } f'(x) = 0 &\Leftrightarrow (1-x)e^{1-x} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1-x = 0. \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Le tableau de variation de la fonction f :

| | | | |
|---------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - |
| f | 0 | 1 | 0 |

2) (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

a) Pour montrer que $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout entier naturel n , on raisonne par récurrence.

- On a $0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$, d'où la proposition est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit n un entier naturel. On suppose que la proposition est vraie pour cet entier n .
On a donc $0 \leq u_n \leq 1$.

- Montrons que la proposition est vraie pour $n+1$.

$$\begin{aligned}
 0 \leq u_n \leq 1 &\Rightarrow u_n \in [0, 1] \\
 &\Rightarrow f(u_n) \in [0, 1]; \text{ d'après le tableau de variation de } f \\
 &\Rightarrow u_{n+1} \in [0, 1] \\
 &\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1
 \end{aligned}$$

D'où la proposition est vraie pour $n+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence on a $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On a : $0 \leq u_n \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
 \text{D'après 1)a) } 0 \leq u_n \leq 1 &\Rightarrow u_n \leq f(u_n) \\
 &\Rightarrow u_n \leq u_{n+1}
 \end{aligned}$$

D'où la suite (u_n) est croissante.

c) On a $0 \leq u_n \leq 1$, donc la suite (u_n) est majorée par 1.

La suite (u_n) est croissante et majorée donc elle est convergente. Soit l sa limite.

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$, la limite l vérifie $f(l) = l$.

$$\begin{aligned}
 f(l) = l &\Leftrightarrow l e^{l-1} = l \\
 &\Leftrightarrow l(e^{l-1} - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } e^{l-1} = 1 \\
 &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l - 1 = 0 \\
 &\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1
 \end{aligned}$$

Or $l \neq 0$, car la suite est croissante et minorée par 0, d'où $l = 1$.

Ainsi la suite (u_n) converge vers 1.

Exercice 3

Les résultats du baccalauréat, dans un établissement public donné, sont :

- 60% des candidats sont admis.
- Parmi les candidats admis, 80% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20.
- Parmi les candidats non admis, 70% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20.

A « le candidat interrogé est admis au baccalauréat ».

M « la moyenne annuelle du candidat interrogé est supérieure ou égale à 10 sur 20 ».

1)a) \bar{A} « le candidat interrogé n'est pas admis au baccalauréat ».

60% des candidats sont admis, donc 40% ne le sont pas. D'où $p(\bar{A}) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10} = 0.4$

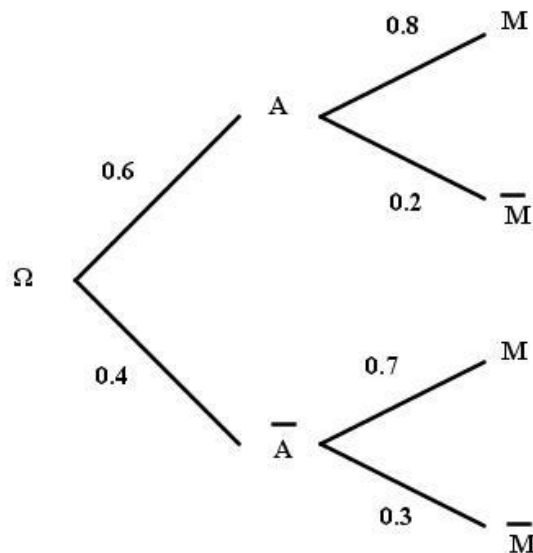
Parmi les candidats admis, 80% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20. D'où la probabilité que la moyenne annuelle du candidat interrogé est supérieure ou égale à 10 sur 20 sachant qu'il est admis au baccalauréat est $p(M/A) = \frac{80}{100} = 0.8$.

Parmi les candidats non admis, 70% ont une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 sur 20. D'où la probabilité que la moyenne annuelle du candidat interrogé est supérieure ou égale à 10 sur 20 sachant qu'il n'est pas admis au baccalauréat est

$$p(M/\bar{A}) = \frac{70}{100} = 0.7.$$

b) $p(\bar{M}/A) = 1 - p(M/A) = 1 - 0.8 = 0.2 = \frac{1}{5}$.

2) L'arbre pondéré suivant décrit la situation.



3)a) La probabilité qu'un candidat interrogé soit admis et que sa moyenne annuelle soit inférieure à 10 sur 20 est donnée par $p(\bar{M} \cap A) = p(A) \cdot p(\bar{M}/A) = 0.6 \cdot 0.2 = 0.12$.

$$\begin{aligned} \text{b) } p(M) &= p(M \cap A) + p(M \cap \bar{A}) \\ &= p(A) \cdot p(M/A) + p(\bar{A}) \cdot p(M/\bar{A}) \\ &= 0.6 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.7 \\ &= 0.48 + 0.28 \\ &= 0.76 \end{aligned}$$

c) La probabilité qu'un candidat interrogé soit admis sachant qu'il a obtenu une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 est $p(A/M)$.

$$p(A/M) = \frac{p(M \cap A)}{p(M)} = \frac{0.48}{0.76} = \frac{48}{76} = \frac{12}{19}. \quad (p(M \cap A) = p(A) \cdot p(M/A) = 0.48)$$

4) On sait que le nombre de candidats de cet établissement est égal à 200.

La probabilité qu'un candidat soit admis et n'ayant pas une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 est $p(\overline{M} \cap A) = 0.12$.

Le nombre estimé de candidats admis et n'ayant pas une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10 est $200 \times 0.12 = 24$ candidats.

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2 \ln(x) & ; \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$1) a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x^2 \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - 2x(x \ln(x)) = 0 = f(0).$$

D'où f est continue à droite en 0.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2x \ln(x) = 0. \text{ D'où } f \text{ est dérivable à droite en 0 et } f'(0) = 0.$$

$f'(0) = 0$, d'où la courbe (C) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale.

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x^2 \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2(1 - 2\ln(x)) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x^2 \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 2x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - 2\ln(x)) = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty, \text{ d'où la courbe (C) admet une branche infinie de direction l'axe } (O, \vec{j}).$$

$$3) a) f(x) = x^2 - 2x^2 \ln(x) \quad ; \text{ si } x > 0.$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x - (2x^2)' \cdot \ln(x) - 2x^2 \cdot (\ln(x))' \\ &= 2x - 4x \cdot \ln(x) - 2x^2 \cdot \frac{1}{x} \\ &= 2x - 4x \cdot \ln(x) - 2x \\ &= -4x \cdot \ln(x) \end{aligned}$$

Ainsi pour tout $x \in]0, +\infty[$; $f'(x) = -4x \ln(x)$.

b) On a $f'(x) = -4x \ln(x)$; pour tout $x > 0$.

Le signe de $f'(x)$ est celui de $-\ln(x)$.

Le tableau de variation de f :

| | | | | |
|---------|---|-------------------------|-----------|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ | |
| $f'(x)$ | 0 | + | 0 | - |
| f | 0 | \swarrow 1 \searrow | | $-\infty$ |

4) On a $f(0) = 0$.

$$\text{si } x > 0 ; f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x^2 \ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(1 - 2\ln(x)) = 0$$

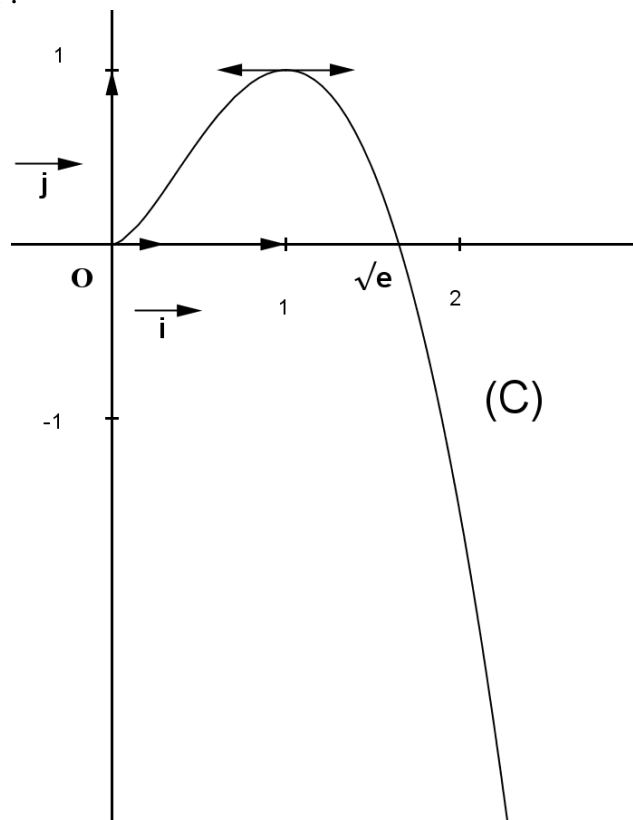
$$\Leftrightarrow 1 - 2\ln(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe (O, \vec{i}) sont 0 et \sqrt{e} .

5) La courbe (C) de f :



6) Soit λ un réel tel que : $0 < \lambda < \sqrt{e}$.

a) $I = \int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2 \ln(x) dx$.

On pose : $u(x) = \ln(x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{x}$

$v'(x) = x^2 \Rightarrow v(x) = \frac{1}{3}x^3$

En appliquant la formule d'intégration par parties on a :

$$\begin{aligned} I &= \int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2 \ln(x) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 \ln(x) \right]_{\lambda}^{\sqrt{e}} - \frac{1}{3} \int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2 dx \\ &= \frac{1}{3}(\sqrt{e})^3 \ln(\sqrt{e}) - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln(\lambda) - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{\lambda}^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{1}{6}e\sqrt{e} - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln(\lambda) - \frac{1}{9}[(\sqrt{e})^3 - \lambda^3] \\ &= \frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln(\lambda) + \frac{1}{18}e\sqrt{e} \end{aligned}$$

b) $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe (C) et les

droites d'équations $x = \lambda$ et $x = \sqrt{e}$. On a $\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{\sqrt{e}} f(x) dx$.

$$\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} f(x) dx = \int_{\lambda}^{\sqrt{e}} (x^2 - 2x^2 \ln(x)) dx = \int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2 dx - 2I = \left[\frac{1}{3}x^3 \right]_{\lambda}^{\sqrt{e}} - 2I = \frac{1}{3}e\sqrt{e} - \frac{1}{3}\lambda^3 - 2I$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_{\lambda}^{\sqrt{e}} f(x) dx = \frac{1}{3}e\sqrt{e} - \frac{1}{3}\lambda^3 - 2I = \frac{1}{3}e\sqrt{e} - \frac{1}{3}\lambda^3 - 2 \left(\frac{1}{9}\lambda^3 - \frac{1}{3}\lambda^3 \ln(\lambda) + \frac{1}{18}e\sqrt{e} \right)$$

$$\mathcal{A}(\lambda) = -\frac{5}{9}\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^3 \ln(\lambda) + \frac{2}{9}e\sqrt{e}$$

c) $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \mathcal{A}(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} -\frac{5}{9}\lambda^3 + \frac{2}{3}\lambda^3 \ln(\lambda) + \frac{2}{9}e\sqrt{e} = \frac{2}{9}e\sqrt{e}$.