

Section : Sciences techniques

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

I)	II)	III)	
b)	c)	1)	2)
		a)	b)

I) Le vecteur $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ normal à P, donc la droite (AB) est orthogonale au plan P, donc sécante avec le plan P.

III)1) H est le projeté orthogonal de O sur le plan Q, donc H appartient au plan Q, par

conséquent le cas b) est à éliminer. Le vecteur \overrightarrow{OH} est colinéaire au vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ normal

à Q, seul le cas en a) qui vérifie.

2) $OH = \sqrt{3} < 2$, d'où l'intersection du plan Q avec la sphère S est un cercle.

Exercice 2

Soit dans \mathbb{C} l'équation (E) : $z^2 + 2(\sqrt{3} - i)z - 4i\sqrt{3} = 0$.

1)a) $(2\sqrt{3} + 2i)^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 2i + (2i)^2 = 12 + 8i\sqrt{3} - 4 = 8 + 8i\sqrt{3}$

b) (E) : $z^2 + 2(\sqrt{3} - i)z - 4i\sqrt{3} = 0$.

On calcule le discriminant :

$$\begin{aligned} \Delta &= [2(\sqrt{3} - i)]^2 - 4 \times (-4i\sqrt{3}) = 4(3 - 2i\sqrt{3} - 1) + 16i\sqrt{3} \\ &= 8 + 8i\sqrt{3} \\ &= (2\sqrt{3} + 2i)^2 \end{aligned}$$

D'où une racine de Δ est $\delta = 2\sqrt{3} + 2i$.

$$z_1 = \frac{-2(\sqrt{3} - i) - (2\sqrt{3} + 2i)}{2} = -2\sqrt{3}$$

$$z_2 = \frac{-2(\sqrt{3} - i) + (2\sqrt{3} + 2i)}{2} = 2i$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{-2\sqrt{3}; 2i\}.$$

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . A et B les points d'affixes respectives $z_A = -2\sqrt{3}$ et $z_B = \sqrt{3} - 3i$.

a) Pour montrer que le triangle OAB est isocèle en O, il suffit de vérifier que $OA = OB$.

$$OA = |z_A| = |-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3} \quad ; \quad OB = |z_B| = |\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}.$$

On a $OA = OB$, d'où le triangle OAB est isocèle en O .

b) Le triangle OAB est isocèle en O , donc $OA = OB$ et par conséquent le point B appartient au cercle Γ de centre O et passant par A . D'autre part l'ordonnée du point B est (-3) , donc B appartient à la droite Δ d'équation $y = -3$. Ainsi le point B appartient à l'intersection du cercle Γ et de la droite Δ . Il y a deux points d'intersection, mais on sait que l'abscisse du point B est positive, d'où la construction du point B .

3) C et D les points d'affixes respectives $z_C = 2i$ et $z_D = -\frac{z_B}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{z_B - z_D}{z_A - z_C} &= \frac{z_B - \left(-\frac{z_B}{2}\right)}{-2\sqrt{3} - 2i} = \frac{\frac{3}{2}z_B}{-2\sqrt{3} - 2i} = -\frac{3}{4} \frac{z_B}{\sqrt{3} + i} \\ &= -\frac{3}{4} \frac{\sqrt{3} - 3i}{\sqrt{3} + i} = -\frac{3}{4} \frac{(\sqrt{3} - 3i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} \\ &= -\frac{3}{4} \frac{(\sqrt{3} - 3i)(\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)} = -\frac{3}{4} \frac{3 - 3i\sqrt{3} - i\sqrt{3} - 3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}i. \end{aligned}$$

Le nombre complexe $\frac{z_B - z_D}{z_A - z_C}$ est un imaginaire pur, donc les vecteurs \overrightarrow{DB} et \overrightarrow{AC} sont orthogonaux. Par suite les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires.

$$\text{b) } \text{Aff}(\overrightarrow{AD}) = z_D - z_A = -\frac{z_B}{2} - (-2\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i + 2\sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i = \frac{3}{2}(\sqrt{3} + i).$$

$$\text{Aff}(\overrightarrow{AC}) = z_C - z_A = 2i - (-2\sqrt{3}) = 2i + 2\sqrt{3} = 2(\sqrt{3} + i).$$

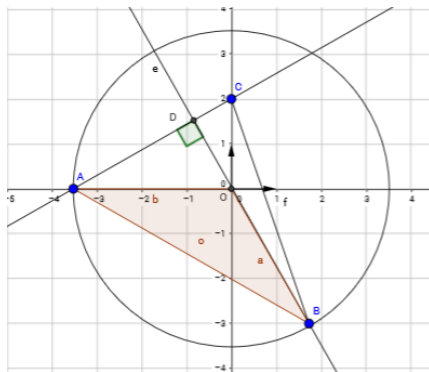
$$\text{On a : } \frac{\text{Aff}(\overrightarrow{AD})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AC})} = \frac{\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i)}{2(\sqrt{3} + i)} = \frac{3}{4}.$$

D'où les vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{AC} sont colinéaires et par conséquent les points A , D et C sont alignés.

c) On place le point C dans le plan muni du repère direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

Les points A , C et D sont alignés, d'où le point D appartient à la droite (AC) .

On sait déjà que les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires, ainsi D est l'intersection de la droite (AC) et la perpendiculaire à (AC) passant par B . D'où la construction du point D .



d) On sait que l'aire d'un triangle est $\frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$, la hauteur est associée au côté considéré comme base. L'aire du triangle ABC est :

$$\begin{aligned} \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} &= \frac{AC \times BD}{2} = \frac{|z_C - z_A| \times |z_D - z_B|}{2} = \frac{|-2\sqrt{3} - 2i| \times \left| \frac{3}{2} z_B \right|}{2} \\ &= \left| \sqrt{3} + i \right| \times \frac{3}{2} \times |z_B| = 2 \times \frac{3}{2} \times \sqrt{12} = 6\sqrt{3} \text{ unité d'aire.} \end{aligned}$$

Exercice 3

La suite u est définie sur \mathbb{N} par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2}{2\sqrt{2} - u_n} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1)a) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \sqrt{2}$.

- $u_0 = 0 < \sqrt{2}$, l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit n un entier naturel. Supposons que l'inégalité est vraie pour n , c'est-à-dire que $u_n < \sqrt{2}$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$. On a $u_n < \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} u_n < \sqrt{2} &\Rightarrow -u_n > -\sqrt{2} \\ &\Rightarrow 2\sqrt{2} - u_n > \sqrt{2} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{2} - u_n} > \frac{1}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow \frac{2}{2\sqrt{2} - u_n} > \frac{2}{\sqrt{2}} \\ &\Rightarrow u_{n+1} < \sqrt{2} \end{aligned}$$

D'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \sqrt{2}$.

b) Montrons que la suite u est croissante.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{2\sqrt{2} - u_n} - u_n = \frac{2 - (2\sqrt{2} - u_n)u_n}{2\sqrt{2} - u_n}$$

$$= \frac{u_n^2 - 2\sqrt{2}u_n + 2}{2\sqrt{2} - u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2} - u_n}.$$

On a $u_n < \sqrt{2}$ d'où $2\sqrt{2} - u_n > 0$ et $(u_n - \sqrt{2})^2 > 0$, par conséquent $u_{n+1} - u_n > 0$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} > u_n$. Cela prouve que la suite u est croissante.

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < \sqrt{2}$, donc la suite u est minorée par $\sqrt{2}$.

La suite est croissante et elle est majorée, donc elle est convergente.

Soit l la limite de la suite u .

On peut remarquer que la suite u est positive et majorée par $\sqrt{2}$, donc

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est la fonction définie sur $[0, \sqrt{2}]$ par $f(x) = \frac{2}{2\sqrt{2} - x}$.

La fonction f est continue sur $[0, \sqrt{2}]$ et la suite u converge vers l , donc $f(l) = l$.

$$f(l) = l \Leftrightarrow l = \frac{2}{2\sqrt{2} - l}$$

$$\Leftrightarrow l(2\sqrt{2} - l) = 2$$

$$\Leftrightarrow 2l\sqrt{2} - l^2 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow l^2 - 2l\sqrt{2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (l - \sqrt{2})^2 = 0 \Leftrightarrow l = \sqrt{2}.$$

D'où la suite u converge vers $\sqrt{2}$.

2) La suite v est définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{u_n}{\sqrt{2} - u_n}$; $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{a) Soit } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{\sqrt{2} - u_{n+1}} = \frac{\frac{2}{2\sqrt{2} - u_n}}{\sqrt{2} - \frac{2}{2\sqrt{2} - u_n}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}(2\sqrt{2} - u_n) - 2} = \frac{2}{\sqrt{2}(2\sqrt{2} - u_n - \sqrt{2})} = \frac{2}{\sqrt{2}(\sqrt{2} - u_n)} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - u_n}.$$

$$\text{b) Soit } n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} - u_n} = \frac{\sqrt{2} - u_n + u_n}{\sqrt{2} - u_n} = 1 + \frac{u_n}{\sqrt{2} - u_n} = 1 + v_n.$$

D'où v est une suite arithmétique de raison 1.

c) v est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \frac{u_0}{\sqrt{2} - u_0} = 0$, car $u_0 = 0$.

D'où $v_n = v_0 + n \times r$, où r est la raison de la suite v
 $= n$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = n$.

$$\begin{aligned} v_n = n &\Leftrightarrow n = \frac{u_n}{\sqrt{2} - u_n} ; n \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow n(\sqrt{2} - u_n) = u_n \\ &\Leftrightarrow n\sqrt{2} - nu_n = u_n \\ &\Leftrightarrow n\sqrt{2} = (n+1)u_n \\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{n\sqrt{2}}{n+1} \end{aligned}$$

Ainsi $u_n = \frac{n\sqrt{2}}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $W_n = \ln(u_n)$ et $S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$.

$$\begin{aligned} \text{a) } S_n &= W_1 + W_2 + \dots + W_n \\ &= \ln(u_1) + \ln(u_2) + \ln(u_3) + \dots + \ln(u_n) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \ln\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) + \ln\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right) + \dots + \ln\left(\frac{(n-1)\sqrt{2}}{n}\right) + \ln\left(\frac{n\sqrt{2}}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{2\sqrt{2}}{3} \times \frac{3\sqrt{2}}{4} \times \dots \times \frac{(n-1)\sqrt{2}}{n} \times \frac{n\sqrt{2}}{n+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(\sqrt{2})^n}{n+1}\right) = n \ln \sqrt{2} - \ln(n+1) = \frac{1}{2} n \ln 2 - \ln(n+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\ln(n+1)}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\ln(n) + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n} = \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = -2x + x \ln(x+1)$. C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

$$1) \text{a) } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} -2x + x \ln(x+1) = +\infty ; \text{ car } \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \ln(x+1) = -\infty.$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x + x \ln(x+1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x[-2 + \ln(x+1)] = +\infty, \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x+1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 + \ln(x+1) = +\infty.$$

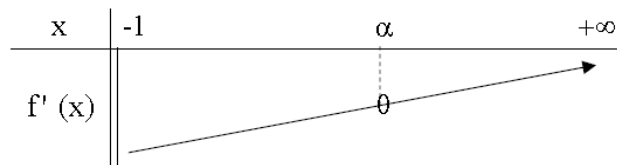
La courbe C_f admet une branche parabolique de direction l'axe (O, \vec{j}) .

$$2) \text{a) } f(x) = -2x + x \ln(x+1), x \in]-1, +\infty[.$$

$$f'(x) = -2 + \ln(x+1) + x \frac{1}{x+1} = -2 + \frac{x}{x+1} + \ln(x+1)$$

$$= \frac{-2(x+1) + x}{x+1} + \ln(x+1) = -\frac{x+2}{x+1} + \ln(x+1).$$

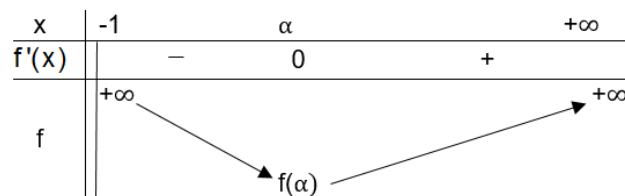
b) Le tableau de variation de la fonction f' dérivée de f est :



On peut déterminer le signe de f' à partir de son tableau de variation :

x	-1	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+

c) Le tableau de variation de f :



3)a) $f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\alpha+2}{\alpha+1} + \ln(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha+2}{\alpha+1}.$

$$f(\alpha) = -2\alpha + \alpha \ln(\alpha+1) = -2\alpha + \alpha \frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

$$= \frac{-2\alpha(\alpha+1) + \alpha(\alpha+2)}{\alpha+1} = \frac{-2\alpha^2 - 2\alpha + \alpha^2 + 2\alpha}{\alpha+1} = \frac{-\alpha^2}{\alpha+1} = g(\alpha).$$

b) Voir figure.

4)a) $f(x) = -2x + x \ln(x+1), x \in]-1, +\infty[.$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x + x \ln(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x[-2 + \ln(x+1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \ln(x+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x+1 = e^2$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = e^2 - 1.$$

Les points d'intersection de la courbe C_f et l'axe des abscisses sont O et le point de coordonnées $(e^2 - 1, 0)$.

b) Voir figure.

5)a) Soit $x > -1$; $g(x) = \frac{-x^2}{x+1} = \frac{1-x^2-1}{x+1} = \frac{(1-x)(1+x)-1}{x+1} = 1-x - \frac{1}{x+1}.$

b) $\int_0^\alpha g(x) dx = \int_0^\alpha \left(1-x - \frac{1}{x+1}\right) dx$

$$= \left[x - \frac{1}{2}x^2 - \ln(x+1) \right]_0^\alpha = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \ln(\alpha+1) = \alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{\alpha+2}{\alpha+1}.$$

c) $\int_0^\alpha x \ln(1+x) dx$?

On pose $u(x) = \ln(1+x) \Rightarrow u'(x) = \frac{1}{1+x}$

$v'(x) = x \Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^2$

Par une intégration par parties on a :

$$\int_0^\alpha x \ln(1+x) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(1+x) \right]_0^\alpha + \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{-x^2}{1+x} dx = \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(1+\alpha) + \frac{1}{2} \int_0^\alpha g(x) dx.$$

d) A l'aire de la partie du plan limitée par C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\alpha -f(x) dx = \int_0^\alpha [2x - x \ln(1+x)] dx \\ &= \int_0^\alpha 2x dx - \int_0^\alpha x \ln(1+x) dx \\ &= \left[x^2 \right]_0^\alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 \ln(1+\alpha) - \frac{1}{2} \int_0^\alpha g(x) dx \\ &= \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\alpha+2}{\alpha+1} - \frac{1}{2} \left[\alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \right] \\ &= \frac{3}{4} \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 \frac{\alpha+2}{\alpha+1} + \frac{1}{2} \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \\ &= \frac{3}{4} \alpha^2 - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{2} (\alpha^2 - 1) \frac{\alpha+2}{\alpha+1} \\ &= \frac{3\alpha^2(\alpha+1) - 2\alpha(\alpha+1) - 2(\alpha^2 - 1)(\alpha+2)}{4(\alpha+1)} = \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 4}{4(\alpha+1)} \end{aligned}$$

