EXERCICE 1 : (6 points)

1-/ On considère la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ *et* $V_n = \ln(U_n)$

a-/ Calculer U_0 ; U_1 ; U_2 ; V_0 ; V_1 ; V_2

b-/ Déterminer la nature et la raison de chacune des suites.

c-/ Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$ et en déduire la limite de V_n en $+ \infty$.

2-/ Un examen comporte deux épreuves : une épreuve de biologie et une épreuve de chimie. Il y a 20 questions en biologie et 15 questions en chimie. Chaque question est marquée par un numéro et ces numéros sont placés dans deux sacs distincts, un contenant les questions de chimie et l'autre les questions de biologie. Tout candidat à cet examen doit tirer au hasard une question en biologie et une question en chimie. Sera déclaré directement admis tout candidat qui aura répondu vrai aux deux questions.

a-/ Un candidat à cet examen a combien de choix possibles ?

b-/ Un candidat C_1 se présente à cet examen en ignorant 8 questions de biologie et 5 questions de chimie ; un autre candidat C_2 se présente en ignorant 5 questions de biologie et 8 questions de chimie.
Lequel des deux candidats a plus de chance de réussir ?

c-/ Quel est le pourcentage de réussite du candidat le moins chanceux parmi les deux ?

d-/ Le jury décide de repêcher tout candidat qui aura répondu vrai à la question de chimie et raté la question de biologie ; dans ces conditions :

– Quelle est la probabilité que C_1 soit repêché, que C_2 soit repêché ?

– Quelle est la probabilité pour chacun d'être admis à l'examen ?

EXERCICE 2 : (4 points)

1-/ Soit dans $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z,

$$(E): \quad z^2 - (\sqrt{3} + i\,)z + (1 + i\sqrt{3}) = 0$$

a-/ Calculer $(1 - i\sqrt{3})^2$

b-/ On pose $a = \dfrac{\sqrt{3} + i}{2}$ *et* $b = \dfrac{i\sqrt{3} - 1}{2}$; écrire a et b sous forme trigonométrique.

2-/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) puis vérifier que ses solutions s'expriment simplement en fonction de a et b.

3-/ Représenter dans le plan les points images des complexes a et b et en déduire la représentation des points images des solutions de (E) .

PROBLEME : (10 points)

I-/ Soit la fonction numérique de la variable réelle t définie par $f(t) = \dfrac{1}{t(1+t)^2}$.

1-/ a-/ Déterminer l'ensemble de définition D_f de f .

b-/ Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout $t \in D_f$ $\quad f(t) = \dfrac{a}{(1+t)^2} + \dfrac{b}{1+t} + \dfrac{c}{t}$.

2-/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative C_f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

3-/ Soient x et y deux réels tels que $0 < x < y$. On pose : $A(x,y) = \int_x^y f(t)\,dt$

Calculer $A(x,y)$; quelle est l'interprétation géométrique de $A(x,y)$?

II-/ Soit g la fonction numérique de la variable réelle t définie par :

$$g(t) = \frac{-1}{t^2(1+t)}$$

1-/ Quelle est l'ensemble des primitives de la fonction h définie par :

$$h(t) = g(t) - f(t) \,?$$

2-/ Déduire la valeur de $B(x,y) = \int_x^y g(t)\,dt$

3-/ x étant un réel fixé trouver la limite F(x,y) de A (x,y) lorsque y tend vers +**∞** puis la limite G (x) de B (x,y) quand y tend vers +**∞** .

III-/ On suppose $x > 0$.

1-/ Etudier les variations de la fonction F. En déduire que : $\forall\ x\,;\, x > 0,\ 0 <$ F (x).

2-/ Etudier les variations de G ; en déduire que : $x\,;\, x > 0$, G (x) < 0.