∽ Baccalauréat Lyon juin 1966 ∾
Mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Un point O situé sur l'axe d'un cylindre C de révolution est le centre d'une sphère S dont le rayon est supérieur à celui de C. On appelle $\sum$ le solide formé des points intérieurs à la sphère S et extérieurs au cylindre C.
Montrer que le volume de $\sum$ s'exprime uniquement en fonction de la distance h des plans contenant les cercles d'intersection de C et de S.

EXERCICE 2

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'\text{O}x, y'\text{O}y$, on considère, d'une part, le faisceau des cercles (Ω_λ) tangents à $x'\text{O}x$ au point d'abscisse 1 et dont les centres sont les points ω_λ de coordonnées $(1~;~\lambda)$ et, d'autre part, le faisceau des droites $\text{O}\omega_\lambda$.
On désigne par M_λ et M'_λ les points d'intersection de (Ω_λ) et de $\text{O}\omega_\lambda$, M'_λ étant celui de ces points dont l'abscisse est supérieure à 1.
L'objet du problème est l'étude de l'ensemble (Γ) décrit par les points M_λ et M'_λ lorsque λ décrit l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.

1. Quel est le transformé de (Γ) par l'inversion de pôle O et de puissance 1 ?
   Quel est le transformé de (Γ) par la symétrie d'axe $x'\text{O}x$?
2. Calculer, en fonction de λ, les distances OM_λ et OM'_λ.
   Calculer les limites de ces distances quand λ tend vers $+\infty$.
   Calculer, en fonction de λ, la distance de M à la droite d'équation x = 2.
   Calculer la limite de cette distance lorsque λ tend vers $+\infty$.
   Quelle est la propriété géométrique de (Γ) mise en évidence par ce résultat ?
3. Le nombre λ étant donné, écrire l'équation du cercle $(0\Omega_\lambda)$ et celle de la droite $\text{O}\omega_\lambda$.
   En déduire une relation indépendante de λ entre les coordonnées d'un point de (Γ).
4. Soit f l'application de $[0~;~+2[$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = (x-1)\sqrt{\frac{x}{x-1}}.$$

   a. Soit (Γ_1) le graphe de f dans le plan rapporté à $x'\text{O}x,~ y'\text{O}y$. Comment peut-on déduire (Γ) de (Γ_1) ?
   b. Montrer, avant d'entreprendre le calcul de toute dérivée, que la fonction dérivée de f prend, au moins une fois, la valeur 0 dans l'intervalle $]0~;~+1[$.
   c. Étudier f et construire (Γ_1), puis (Γ). On précisera l'allure de (Γ) au voisinage du point d'abscisse 1.
5. On considère maintenant deux nombres réels, λ et μ.
   a. Montrer que les points M_λ, M'_λ, M_μ et M'_μ sont situés sur un même cercle, dont on désigne le centre par $\sigma_{\lambda\mu}$.
   b. Montrer que les points O, $\omega_\lambda, \omega_\mu$ et $\sigma_{\lambda\mu}$ sont cocycliques.
   En supposant λ fixe, déterminer la position limite τ_λ, de $\sigma_{\lambda\mu}$ quand μ tend vers λ.
   Quel est l'ensemble des points τ_λ lorsque λ décrit $\mathbb{R}$.