Dakar juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Démontrer que $2^{2n}+2$ est divisible par 3 quel que soit l'entier naturel n.
En déduire, ou démontrer directement, que

$$2^{2n}+15n-1$$

est un multiple de 9. (On pourra raisonner par récurrence.)

EXERCICE 2

Simplifier l'écriture du nombre complexe

$$Z=\frac{(\mathrm{i}-1)^4}{(\mathrm{i}+1)^5}.$$

Préciser le module et l'argument.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (R) d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, de vecteurs unitaires $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$.
Soit T la transformation ponctuelle qui, à tout point M de coordonnées x, y [on écrira $M(x\,;\,y)$], fait correspondre le point $M'(x'\,;\,y')$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' &=& 2x+3y,\\ y' &=& 3x+10y.\end{array}\right.$$

1. Montrer que T admet une transformation réciproque, T^{-1}. Existe-t-il des points doubles ? T est-elle involutive ?
2. Trouver la transformée, (D$'$), d'une droite (D) d'équation $ax+by+c=0$ par la transformation T.
   Calculer le coefficient directeur, p', de (D') en fonction de celui, p, de (D).
   On pose S = (D) $\cap$ (D$'$). Déterminer l'ensemble des points S quand (D) varie.
3. Démontrer que, si deux points particuliers, M et M', se correspondent dans une homothétie de centre O et de rapport k, k est solution de l'équation

   $$k^2-12k+11=0.$$

   Calculer la valeur de k ; en déduire que M et M' appartiennent à l'une ou l'autre de deux droites, dont on déterminera l'angle.
4. À chaque point du plan, de coordonnées $(x\,;\,y)$, on associe le vecteur $\overrightarrow{V}$ de composantes scalaires $(x\,;\,y)$ par rapport à (R) [on écrira $\overrightarrow{V}(x\,;\,y)$].
   Étant donné deux vecteurs, $\overrightarrow{V_1}\left(x_1\,;\,y_1\right)$ et $\overrightarrow{V_2}\left(x_2\,;\,y_2\right)$, montrer que l'expression

   $$F\left(\overrightarrow{V_1},\,\overrightarrow{V_2}\right)=2x_1x_2+3x_1y_2+3x_2y_1+10y_1y_2$$

   satisfait aux conditions (1), (2), (3) suivantes :

   $$\begin{array}{lrcll}(1) & F\left(\overrightarrow{V_1},\,\overrightarrow{V_2}\right) &=& F\left(\overrightarrow{W_1},\,\overrightarrow{V_2}\right)+F\left(\overrightarrow{W_1'},\,\overrightarrow{V_2}\right) & \text{si } \overrightarrow{V_1}=\overrightarrow{W_1}+\overrightarrow{W_1'}\\ (2) & F\left(\overrightarrow{V_1},\,\overrightarrow{V_2}\right) &=& F\left(\overrightarrow{V_1},\,\overrightarrow{W_2}\right)+F\left(\overrightarrow{V_1},\,\overrightarrow{W_2'}\right) & \text{si } \overrightarrow{V_2}=\overrightarrow{W_2}+\overrightarrow{W_2'}\end{array}$$

On posera, pour cela, $\overrightarrow{W_1}\left(\alpha_1,\ \beta_1\right), \overrightarrow{W_1'}\left(\alpha_1',\ \beta_1'\right), \overrightarrow{W_2}\left(\alpha_2,\ \beta_2\right), \overrightarrow{W_2'}\left(\alpha_2',\ \beta_2'\right)$.
Si l et m sont des constantes,

$$(3) \quad F\left(l\overrightarrow{V_1},\ m\overrightarrow{V_2}\right) = lmF\left(\overrightarrow{V_1},\ \overrightarrow{V_2}\right).$$

Que peut-on dire de $F\left(\overrightarrow{W_1},\ \overrightarrow{W_2}\right)$ si $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ sont respectivement parallèles aux vecteurs $\overrightarrow{u}\,(+3\ ;\ -1)$ et $\overrightarrow{v}\,(+1\ ;\ +3)$. Par suite, si l'on pose

$$\begin{array}{ccccc} \overrightarrow{V_1} & = & x_1\overrightarrow{\imath} + y_1\overrightarrow{\jmath}\,] & = & X_1\overrightarrow{u} + Y_1\overrightarrow{v}, \\ \overrightarrow{V_2} & = & x_2\overrightarrow{\imath} + y_2\overrightarrow{\jmath}\,] & = & X_2\overrightarrow{u} + Y_2\overrightarrow{v}, \end{array}$$

calculer $F\left(\overrightarrow{V_1},\ \overrightarrow{V_2}\right)$ en fonction de X_1, X_2, Y_1, Y_2 et $F\left(\overrightarrow{V_1},\ \overrightarrow{V_1}\right)$ en fonction de X_1 et Y_1.

5. Trouver l'ensemble, (E), des points $M(x\ ;\ y)$, de tranformé $M'(x'\ ;\ y')$ par T, tels que $\overrightarrow{\mathrm{O}M} \cdot \overrightarrow{\mathrm{O}M'} = k^2$?
Pour cela, on formera l'équation de (E) dans le repère (R), puis dans le repère (R$'$), de même origine, de base $\overrightarrow{u} = 3\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{\imath} + 3\overrightarrow{\jmath}$.