

∞ La Réunion juin 1967 ∞  
Baccalauréat mathématiques élémentaires

**EXERCICE 1**

Soit  $a$  un entier supérieur à 2. On considère les nombres

$$N = 2(a-1) \quad \text{et} \quad N' = (a-1)^2.$$

Écrire  $N$  et  $N'$  dans le système de numération de base  $a$ . Vérifier que  $N$  et  $N'$  s'écrivent avec les mêmes chiffres mais dans l'ordre inverse.

**EXERCICE 2**

On considère le nombre complexe

$$Z = 1 + \cos \alpha - i \sin \alpha \quad (0 < \alpha < +\pi).$$

1. Calculer le module et l'argument de  $Z$ .
2. Calculer en fonction de  $\alpha$  les nombres réels  $p$  et  $q$ , sachant que  $Z$  est solution de

$$Z^2 + pZ + q = 0.$$

3. Réciproquement, étant donné une équation  $Z^2 + pZ + q = 0$  ( $p$  et  $q$  réels), quelles conditions doivent vérifier  $p$  et  $q$  pour qu'on puisse trouver un nombre  $\alpha$  réel vérifiant  $0 < \alpha < \pi$ , tel que le nombre  $1 + \cos \alpha - i \sin \alpha$  soit solution de cette équation?

**EXERCICE 3**

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé  $xOy$ , on considère le point fixe,  $A$ , de coordonnées  $x = -a$  et  $y = 0$  ( $a > 0$ ), et une droite variable,  $\Delta$ , passant par  $A$  et coupant  $Oy$  en un point,  $C$ , d'ordonnée positive. Soit  $M$  et  $N$  les points communs à  $\Delta$  et au cercle  $(C)$  de centre  $C$  et de rayon  $CO$ ,  $M$  désignant celui des deux points dont l'abscisse est positive.

On pose

$$\left( \overrightarrow{Ax}, \overrightarrow{AC} \right) = \theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

1. Calculer géométriquement  $(Ox, OM)$  en fonction de  $\theta$ .  
Calculer indépendamment de cela les coordonnées de  $M$  et de  $N$ ; en déduire la pente de  $OM$  et retrouver ainsi la valeur de  $(Ox, OM)$ .
2. On considère l'inversion de centre  $O$  et de puissance  $a^2$ ?  
 $M'$  et  $N'$  désignant les transformés de  $M$  et de  $N$ , on note  $(\gamma)$  le cercle passant par les points  $O, M', N'$ .  
Que peut-on dire de la position de la droite  $M'N'$  par rapport au cercle  $(\gamma)$  correspondant et de l'ensemble des cercles  $(\gamma)$ ?  
Calculer  $(Ax, AM')$  en fonction de  $\theta$ .
3. Soit  $H$  la projection orthogonale de  $M'$  sur  $Ox$ .  
Trouver une relation entre les coordonnées de  $M'$ .  
Dire avec précision quel est l'ensemble des points  $M'$  et quel est l'ensemble des points  $N'$ .  
Déterminer (en utilisant l'inversion précédente) l'équation de la droite  $M'N'$ ; en déduire les coordonnées de  $M'$  en fonction de  $\theta$  et retrouver ainsi la relation entre ces coordonnées.  
Soit  $\omega$  l'orthocentre du triangle  $AOM'$ . Quel est l'ensemble des points  $\omega$ ?