Nancy juin 1967
Baccalauréat mathématiques élémentaires

EXERCICE 1

Soit θ un nombre réel tel que $0 \leqslant \theta < \pi$.
On considère le nombre complexe

$$z = \cos 2\theta + \mathrm{i} \sin 2\theta.$$

Calculer, selon la valeur de θ, le module du nombre complexe

$$w = (1 + \mathrm{i})z + \mathrm{i}\sqrt{2}.$$

EXERCICE 2

1. Étudier les variations de la fonction f qui, à tout x réel tel que $-2 \leqslant x \leqslant 1$, fait correspondre

$$f(x) = x^2 \mathrm{e}^x.$$

   Construire le graphe (Γ) de f dans un repère orthonormé. On prendra l'unité de longueur égale à 5 cm.
2. Déterminer les constantes réelles a, b, c de sorte que $F(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)\mathrm{e}^x$ ait pour dérivée $f(x)$.
   Calculer l'aire du domaine limité par (Γ), l'axe des x et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 1$.

EXERCICE 3

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormé, Ox, Oy. On désigne par T la transformation ponctuelle dans laquelle le point M de coordonnées $(x~;~y)$ a pour image le point M' de coordonnées $(x'~;~y')$ définies par les formules

$$\left\{\begin{array}{l c l} x' & = & 2x + 3y;\\ y' & = & x + 2y.\end{array}\right.$$

1. m étant un nombre réel, soit (D_m) la droite d'équation $y = mx$. Montrer que T transforme (D_m) en une droite $\left(D'_m\right)$ passant par O, dont on donnera la pente en fonction de m. Quelle est la droite $\left(D'_m\right)$ quand $m = -\dfrac{2}{3}$?
2. **a.** Déterminer la droite (Δ) issue de O qui est transformée par T en une droite perpendiculaire à (Δ).
   b. Si M est sur (Δ), M' se déduit de M par une symétrie par rapport à une droite, qu'on déterminera.
3. **a.** Trouver les deux valeurs de m telles que (D_m) coïncide avec sa transformée, $\left(D'_m\right)$.
   L'une des droites (D_m) ainsi obtenues est de pente positive ; soit $(\Delta)_1$ cette droite. L'autre sera notée $(\Delta)_2$.
   b. Si M est sur $(\Delta)_1$, montrer que M' se déduit de M par une homothétie de centre O, dont on déterminera le rapport, k_1.
   Étudier la même question pour $(\Delta)_2$.
4. **a.** Soit à nouveau M un point quelconque du plan, de coordonnées $(x~;~y)$, et soit M', de coordonnées $(x'~;~y')$, son image par T.
   Calculer $x'^2 - 3y'^2$ en fonction de x et y.

b. On désigne par (H) la courbe d'équation $x^2 - 3y^2 = 1$. Quelle est la nature de cette courbe ? Quelles sont ses asymptotes ? Quelle est la courbe transformée de (H) par T ?

c. Soit P le milieu du segment MM', où M' est le transformé de M par T. En fonction des coordonnées $(x~;~y)$ de M, calculer les coordonnées $(X~;~Y)$ de P, puis la quantité $X2 - 3Y^2$.

d. Trouver la courbe (C) décrite par P quand M parcourt (H).

La courbe (C) se déduit de (H) par une transformation simple, qu'on précisera.