Durée : 4 heures

Baccalauréat C Aix-en-Provence septembre 1971

EXERCICE 1

Résoudre l'inéquation

$$\log_a(x+1)+\log_a(x)<1$$

[$\log_a(x)$ est le logarithme de x dans la base a].

EXERCICE 2

Représenter dans un repère orthonormé l'ensemble des points M, d'affixes z, tels que $\dfrac{z-1}{z+\text{i}}$ soit imaginaire pur.

(Raisonner sur la signification géométrique des arguments de $z-1$ et $z+\text{i}$ en introduisant les points, d'affixes 1 et $-\text{i}$.)

PROBLÈME

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, l'ellipse (E) est définie par la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{l}a \text{ et } b \text{ réels fixés } (0<b<a),\\ t \text{ paramètre } (0\leqslant t<2\pi),\\ \text{coordonnées de } M \text{ de paramètre } t\\ x=a\cos t \text{ et } y=b\sin t.\end{array}\right.$$

1. Montrer que (E) admet une tangente en tout point.
   Écrire l'équation de la tangente (D) à (E) au point M de paramètre t (exprimer les coefficients de cette équation en fonction exclusivement de a, b et t).
2. Si t est différent de 0 et de π, calculer les coordonnées des intersections P et Q de (D) avec les tangentes aux sommets du grand axe (qui sont les points de paramètres 0 et π).
   Montrer que le cercle de diamètre PQ passe par deux points fixes F et F$'$.
   Quel est l'ensemble des centres de ces cercles quand t varie ?
3. La normale en M [c'est-à-dire la perpendiculaire en M à (D)] coupe $x'\text{O}x$ en un point N (si t est différent de 0 et π).
   Dans le cas où (D) coupe également $x'\text{O}x$ en un point T, étudier les birapports (F, F$'$, N, T) et (M, T, P, Q).
   En déduire une construction géométrique de M quand N est donné. Discuter.