**Durée : 4 heures**

# Baccalauréat C Bordeaux septembre 1971

**EXERCICE 1**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $x\text{O}y$, de vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$. Un point $M$ se déplace dans le plan et le vecteur accélération, $\Gamma$, de son mouvement est constamment égal au vecteur

$$\vec{\imath} + \vec{\jmath} = b\sqrt{2}.$$

Au temps $t = 0$, le mobile est au point O et le vecteur vitesse est alors $\overrightarrow{V_0} = \vec{\imath}$.
Former l'équation vectorielle du mouvement. Déterminer la trajectoire par son équation dans le repère $x\text{O}y$, puis la préciser en choisissant un repère orthonormé dans lequel un des vecteurs unitaires est $\vec{b}$.
Déterminer la loi horaire du point $M$ ; en particulier, déterminer la position de $M$ correspondant à la vitesse minimale.
(Faire un graphique en prenant 4 cm pour module des vecteurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.)

**EXERCICE 2**

On donne l'application $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par (

$$f(x) = \sqrt[3]{64 + x}.$$

Utiliser le théorème des accroissements finis sur le segment $[0 ; 1]$ pour donner un encadrement de $\sqrt[3]{65}$.

**PROBLÈME**

**Partie A**

On donne dans le plan deux droites $x'x$ et $y'y$ concourantes en O, de vecteurs directeurs respectifs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.
Une transformation ponctuelle, $\mathcal{T}$, est définie dans le plan rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ de la manière suivante :
le point $M$ de coordonnées $(x ; y)$ a pour transformé le point $M'$ de coordonnées $\left(x' ; y'\right)$ vérifiant les relations

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' &=& kx\\ y' &=& k'y,\end{array}\right.$$

$k$ et $k'$ étant deux nombres réels donnés non nuls.
On désignera par P et P$'$ les projections de $M$ et de $M'$ sur $x'x$ parallèlement à $y'y$ et par Q et Q' les projections de $M$ et $M'$ sur $y'y$ parallèlement à $x'x$.

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est le produit, commutatif, de deux affinités, dont on précisera les éléments. Montrer que $\mathcal{T}$ est une bijection du plan dans lui-même et définir la transformation réciproque, $\mathcal{T}^{-1}$.
   Quels sont les points doubles de $\mathcal{T}$ ? Discuter suivant les valeurs de $k$ et $k'$.
   Déterminer l'équation de la transformée $(D')$ par $\mathcal{T}$ de la droite $(D)$ d'équation $ax + by + c = 0$.
   En déduire les droites globalement invariantes par $\mathcal{T}$ [c'est-à-dire telles que $(D)$ et $(D')$ soient confondues].
   Examiner avec soin tous les cas possibles.

2. *On suppose dans cette question* $k \neq 1$, $k' \neq 1$ et $k \neq k'$.
   **a.** Si $M$ et $M'$ sont distincts, la droite $MM'$ coupe $x'x$ en $N$ et $y'y$ en $N'$.
   Montrer que le birapport $\left(N, N', M, M'\right)$ ne dépend que des nombres $k$ et $k'$.
   **b.** Soit $(\Delta)$ une droite passant par O distincte de $x'x$ et $y'y$ et $(\Delta')$ sa transformée par $\mathcal{T}$.
   Montrer que les droites $x'x$, $y'y$, $(\Delta)$ et $(\Delta')$ forment un faisceau dont le birapport ne dépend pas du choix de $(\Delta)$.
   Peut-on choisir $k'$ et $k$ pour que ce faisceau soit harmonique ?

*Dans toute la suite du problème, les droites $x'x$ et $y'y$ sont perpendiculaires et le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ orthonormé.*

**Partie B**

$\alpha, \beta$ et $R$ étant des réels donnés, on considère le cercle (C) d'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2.$$

Montrer que le transformé $(C')$ du cercle $(C)$ par $\mathcal{T}$ est une ellipse ou un cercle ayant pour centre le transformé du centre de $(C)$.
On précisera, lorsque $(C')$ est une ellipse, la direction du grand axe et celle du petit axe.

**Partie C**

On suppose maintenant $k > 0$, $k \neq 1$ et $k' = -k$.

1. **a.** Montrer que $\mathcal{T}$ peut être considérée comme le produit commutatif d'une homothétie positive et d'une symétrie par rapport à une droite.
   **b.** Soit $(\Delta)$ une droite donnée du plan ; on désigne par $\mathcal{S}$ la symétrie par rapport à $(\Delta)$.
   On considère la composée $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ des transformations $\mathcal{T}$ et $\mathcal{S}$.
   Préciser la nature de la transformation $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ en étudiant successivement le cas où $(\Delta)$ est parallèle à $x'x$ et le cas où $(\Delta)$ coupe $x'x$ en I ; on posera

   $$\theta = [x'x,\ (\Delta)] \qquad (\text{mod } \pi).$$

   Montrer que, si $\theta \neq \dfrac{\pi}{2}$, le point double, $\omega$, de la transformation $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ reste sur un arc de cercle, que l'on précisera, lorsque $k$ varie. Que dire de $\omega$ lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ?
2. **a.** Tracer la courbe $(H)$ d'équation

   $$y = \frac{x^2 - 2x}{x-1},$$

   puis sa transformée $(H')$ par $\mathcal{T}$ dans le cas

   $$k = 2 \quad \text{et} \quad k' = -2.$$

   Préciser les asymptotes de ces deux courbes.

**b.** $X$ étant un réel vérifiant $0 < X < 1$, calculer l'aire $(\Sigma)$ de la surface limitée par $x'x$, le point O, la courbe $(H)$ et la droite d'équation $x = X$.
Calculer l'aire $\left(\Sigma'\right)$ de la surface limitée par $x'x$, le point O, la courbe $(H')$ et la droite d'équation

$$x = 2X.$$

On vérifiera que $\left(\Sigma'\right) = 4\,(\Sigma)$.

N.-B. - On rappelle que l'aire d'une surface est un nombre positif ou nul.