Baccalauréat C Cambodge et Laos juin 1971

EXERCICE 1

Étudier les variations de la fonction f qui à tout réel x fait correspondre

$$(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{x}.$$

Tracer sa courbe représentative en repère orthonormé.
On précisera notamment les branches infinies. Quand x tend vers $-\infty$ on pourra poser $x = -X$.
(La lettre e désigne la base des logarithmes népériens.)

EXERCICE 1

Calculer le module et l'argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = 1 - \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_2 = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Mettre le nombre $Z = \dfrac{z_1}{z_2}$ sous la forme $a + \mathrm{i}b$ (a et b étant des réels).
En déduire le sinus et le cosinus de $\dfrac{7\pi}{12}$.

PROBLÈME

Soit dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$ la transformation ponctuelle $\mathcal{T}$ qui, à tout point M, de coordonnées $(x~;~y)$ distinct de l'origine, associe le point $M'(x'~;~y')$ tel que , t '

$$x' = \frac{8x}{4x^2+y^2} \quad \text{et} \quad y' = \frac{8y}{4x^2+y^2}.$$

1. **a.** Donner les expressions de x et de y en fonction de x' et de y'.
   b. Que peut-on en conclure pour la transformation $\mathcal{T}$? .
   c. Déterminer et construire l'ensemble des points doubles de $\mathcal{T}$.
2. Déterminer les transformés par $\mathcal{T}$
   a. d'une droite passant par l'origine (mais privée de ce point),
   b. d'une droite parallèle à $x'\mathrm{O}x$, d'équation $y = y_0$; préciser les éléments remarquables de cette dernière transformée.
3. Trouver l'équation de la transformée par $\mathcal{T}$ de la courbe (C) d'équation

$$4x^2 + y^2 - 16x + 4y + \lambda = 0.$$

   Montrer qu'il existe une, et une seule, valeur de λ, λ_0, pour laquelle cette courbe est invariante dans la transformation. Construire (C) en donnant à λ la valeur λ_0 ?
4. Soit $M(x~;~y)$ un point du plan, distinct de O, et $M'(x'~;~y')$ son transformé par $\mathcal{T}$. L'affinité orthogonale, $\mathcal{A}$, d'axe $x'\mathrm{O}x$ et de rapport $\dfrac{1}{2}$ transforme M en $N(X~;~Y)$; l'inversion J de pôle O et de puissance 2 transforme N en $N'\left(X'~;~Y'\right)$.
   a. Déterminer les expressions de X' et Y' en fonction de x et de y.
   b. Quelle est la transformation qui fait passer de N' à M' ?
   c. Montrer que $\mathcal{T}$ est ainsi identique à un produit de trois transformations simples.
   d. Retrouver, par l'écriture des produits de transformations, la propriété demandée au b. de la question 1.