

## 🌀 Baccalauréat C Clermont-Ferrand juin 1971 🌀

### EXERCICE 1

Dans le plan complexe, soit  $m$  le point d'affixe  $z$  et  $m'$  le point d'affixe  $z'$ , tels que

$$z + z' = 4.$$

Montrer que  $m'$  est l'image de  $m$  par la symétrie,  $\mathcal{S}$ , de centre  $I$  et d'affixe 2.

Soit  $\mathcal{R}$  la rotation de centre  $O$ , d'affixe 0 et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

Montrer que  $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$  est une rotation, dont on précisera le centre en en donnant l'affixe et l'angle.

### EXERCICE 2

On considère le mouvement rectiligne défini par

$$x(t) = \cos 3t + \sqrt{3} \sin 3t.$$

1. Montrer que l'on peut écrire  $x(t)$  sous la forme  $a \cos(\omega t + \varphi)$ , où  $a$ ,  $\omega$  et  $\varphi$  sont des nombres indépendants de  $t$ . Déterminer  $a$ ,  $\omega$  et  $\varphi$ ; on prendra  $\varphi$  tel que

$$-\pi < \varphi < \pi.$$

2. Déterminer la période du mouvement. Préciser, à l'intérieur d'une période, les instants et les abscisses où la vitesse diminue, les instants et les abscisses où elle augmente.

### PROBLÈME

Soit  $f_a$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$  définie par

$$f_a(x) = \frac{x^2 \cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x \cos a + 1},$$

où  $a$  est un paramètre réel tel que  $0 < a < \pi$ .

1. Étudier la fonction  $f_{\frac{\pi}{3}}$ .

Tracer la courbe représentative  $\left(C_{\frac{\pi}{3}}\right)$  de cette fonction dans un repère orthogonal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , d'axes  $x'Ox$  et  $y'Oy$  et tel que  $\|\vec{j}\| = 2\|\vec{i}\|$  (on pourra prendre  $\vec{i}$  de longueur 1 cm).

2. Montrer que, quel que soit  $a$  et quel que soit  $x$ , on a les inégalités

$$f_a(x) + 1 \geq 0 \quad \text{et} \quad -f_a(x) + 1 \geq 0.$$

En déduire que, quel que soit  $a$ , les valeurs de la fonction  $f_a$  sont comprises entre  $-1$  et  $+1$ .

Ces valeurs extrêmes sont-elles atteintes? Si oui, pour quelles valeurs de  $x$ ? Que peut-on en conclure, concernant l'intersection des courbes  $(C_a)$ ?

3. Étudier la fonction  $f_a$ . En donner le tableau des variations. On ne demande pas d'en construire la courbe représentative  $(C_a)$ . On pourra, en quelques mots, comparer son allure à celle de la courbe  $\left(C_{\frac{\pi}{3}}\right)$ .

4. a. On désigne par  $(D_a)$  la tangente à  $(C_a)$  en son point d'intersection  $B_a$  avec  $Oy$ .  
Montrer que  $(D_a)$  rencontre  $(C_a)$  en un point  $M_a$  distinct du point  $B_a$ .  
Déterminer, en fonction de  $a$ , les coordonnées du point  $M_a$ .  
Déterminer l'ensemble parcouru par le point  $M_a$ , lorsque  $a$  varie sur l'intervalle  $]0 ; \pi[$ , et en dessiner la représentation dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du 1. ?
- b. Déterminer l'ensemble des points du plan par lesquels il passe une seule droite  $(D_a)$   
En dessiner la représentation dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .