

∞ Baccalauréat C Départements d’Outre-Mer ∞
juin 1971

EXERCICE 1

On rappelle qu’une fonction continue sur $[a ; b]$ ne peut prendre deux valeurs distinctes A et B sans prendre toutes les valeurs intermédiaires.

1. Montrer qu’une fonction f , continue et strictement décroissante sur un intervalle fermé $[a ; b]$, définit une bijection de $[a ; b]$ sur $[f(b) ; f(a)]$.

2. Appliquer ce résultat à la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ pour montrer que l’équation

$$e^x = 3x \text{ possède une racine, et une seule, comprise entre } \frac{1}{2} \text{ et } 1.$$

Valeurs approchées : $e \approx 2,718$, $e^{\frac{1}{2}} \approx 1,648$.

EXERCICE 2

1. Quels sont les nombres entiers naturels dont le carré divise 468 ?
2. Résoudre, dans l’ensemble des entiers naturels, l’équation $x^2(2x + 1) = 468$.
3. Existe-t-il un nombre b tel que le nombre qui s’écrit 941 dans le système décimal s’écrive $\overline{4205}$ dans la numération de base b ?

PROBLÈME

Le plan complexe (P) est rapporté au repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) noté \mathcal{R} .

On considère la transformation ponctuelle, T , qui à tout point m du plan fait correspondre le point M tel que les affixes z et Z de m et M vérifient la relation $Z = z^2 - z$.

Partie A

1. Quels sont les points doubles de T ?
2. Quels sont les points ayant pour correspondant
 - a. le point A d’affixe 2,
 - b. le point B d’affixe $-1 + i$?
3. La transformation T est-elle
 - a. injective,
 - b. surjective ?
4. Étudier la disposition de deux points m_1 et m_2 ayant par T le même correspondant.
Quels sont les points de (P) qui ont un correspondant unique par T ?

Partie B

1. Calculer les coordonnées X et Y de M en fonction des coordonnées x et y de m .
2. Quelle est l’image de la droite d’équation $y = 0$?
3. Quelle est l’image réciproque de la droite d’équation $y = 0$?
4. Quelle est l’image de la droite d’équation $x = 0$?
Représenter cette image.

5. Quelle est l'image de la droite d'équation $y = x$?
Représenter cette image.
6. Quelle est l'image de la droite d'équation $y = x - 1$?
Ce résultat pouvait-il se déduire sans autre calcul de certains résultats précédents ?

Partie C

On se propose de rechercher l'image (γ) de la droite d'équation $y = 2x$.

1. Exprimer X et Y , coordonnées d'un point M de (γ) , en fonction de l'abscisse x du point m correspondant.
2. On donne les vecteurs

$$\vec{u} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v} = -3\vec{i} + 4\vec{j}.$$

On désigne par \mathcal{R}' le repère (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- a. \mathcal{R}' est-il orthonormé ?
- b. X et Y étant les coordonnées de M dans \mathcal{R} , X' et Y' celles de ce même point dans \mathcal{R}' , déterminer X et Y en fonction de X' et de Y' .
En déduire que, pour tout point de (γ) , on a

$$\begin{cases} 4X' - 3Y' &= -3x^2 - x, \\ 3X' + 4Y' &= 4x^2 - 2x. \end{cases}$$

3. Déterminer l'équation cartésienne de (γ) dans \mathcal{R}' . En déduire sa nature, son axe de symétrie et son sommet.
Représenter graphiquement (γ) dans le repère \mathcal{R} .