Baccalauréat C Dijon juin 1971

EXERCICE 1

Vérifier que

$$x^4 + x^3 + x + 1 \equiv (x-2)^4 \pmod 3,$$

quel que soit l'entier relatif x.
En déduire les entiers relatifs, x, tels que

$$x^4 + x^3 + x + 1 \equiv 0 \pmod 3,$$

EXERCICE 2

On considère la fonction réelle, f, de la variable réelle x définie par

$$y = f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},$$

où e est la hase des logarithmes népériens.
Quel est son ensemble de définition ?
Trouver les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, lorsque x tend vers $-\infty$, lorsque x tend vers 0.
Déterminer le sens de variation de f.

PROBLÈME

Un plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$. Soit (E) l'ensemble des points du plan non situés sur l'axe $x'\mathrm{O}x$.

Partie A

Au couple $(M_1,\ M_2)$ de deux points $M_1\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ et $M_1\left(x_1\ ;\ y_1\right)$ de E on associe le point $N\left(x_1 + x_2\ ;\ y_1 y_2\right)$.
Démontrer que l'on définit ainsi dans (E) une loi de composition interne, que l'on notera $\star$, et que (E, $\star$) est un groupe commutatif. On désigne par I l'élément neutre de ce groupe.

Partie A

Soit T la transformation ponctuelle qui, à tout point M de (E), fait correspondre son symétrique M' pour la loi $\star$.

1.
   a. Démontrer, sans calcul, que T est une bijection de (E) sur lui-même. Est-ce une involution ?

   b. Démontrer que T admet deux points doubles : le point I et un point J, que l'on précisera.

   c. Construire M' lorsque M est donné. Démontrer que, si la droite MM' coupe les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y = 1$ et $y = -1$ aux points P et P', la division $(M,\ M',\ P,\ P')$ est harmonique.

2. **a.** Soit (H) l'hyperbole équilatère passant par I dont une asymptote est l'axe $x'Ox$, l'autre asymptote étant la droite d'équation $x = h$, h nombre réel donné.

Écrire l'équation de (H).

Déterminer l'ensemble des points transformés des points de (H) par T.

Soit (I_i) la tangente en I à (H). Déterminer l'image par T de l'ensemble $(I_i) \cap (\text{E})$.

b. Soit (D) une droite du plan. Déterminer l'image $\left(D'_1\right)$ par T de l'ensemble $(D_1) = (\text{D}) \cap (\text{E})$.

Lorsque (D) coupe les axes en A(a ; 0) et B(0 ; b) distincts de O, démontrer que la tangente à $\left(D'_1\right)$, au point N d'intersection de $\left(D'_1\right)$ avec $y'Oy$, est la polaire de B par rapport aux droites AI et AJ.

3. **a.** Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1.

Former l'équation de l'image $\left(\text{C}'_1\right)$ par T de

$$(\text{C}_1) = (\text{C}) \cap (\text{E}).$$

Tracer $\left(\text{C}'_1\right)$ sur le même graphique que (C).

b. Soit M un point de (C_1), (D) la tangente en M au cercle (C) et $\left(D'_1\right)$ l'image par T de $(D_1) = (\text{D}) \cap (\text{E})$.

Démontrer que $\left(\text{C}'_1\right)$ et $\left(\text{D}'_1\right)$ ont même tangente au point M' transformé de M par T.