Durée : 4 heures

Baccalauréat C Dijon septembre 1971

EXERCICE 1

On donne dans un plan orienté deux points A et B.
M étant un point quelconque du plan, distinct de A, on construit le carré APMQ de diagonale AM, tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{A}P}, \overrightarrow{\mathrm{A}Q}\right) = \dfrac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.
Déterminer les ensembles des points M, des points P et des points Q tels que

$$\mathrm{B}P^2 + \mathrm{B}Q^2 = 2\mathrm{A}M^2.$$

EXERCICE 2

Soit l'équation différentielle du second ordre

$$(E) : \qquad y'' + 2y' + 2y = 0.$$

Montrer que, pour qu'une fonction réelle y de la variable réelle x soit solution de (E), il faut et il suffit que la fonction z définie par $y = \mathrm{e}^{-x}z$ soit solution d'une équation différentielle du second ordre (E_1).
Résoudre (E_1) et en déduire la solution générale de (E).

PROBLÈME

Soit (Π) un plan orienté rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ d'axes Ox et Oy, (E) l'ensemble des vecteurs libres de (Π). À tout couple ordonné $\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right)$ d'éléments de (E) on associe le nombre réel noté $\overrightarrow{V_1}\Delta\overrightarrow{V_2}$ défini par

$$\overrightarrow{V_1}\Delta\overrightarrow{V_2} = \left|\overrightarrow{V_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{V_2}\right| \sin\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\right).$$

1. Démontrer que, quels que soient les nombres réels λ et μ,

$$\left(\lambda\overrightarrow{V_1}\right)\Delta\left(\mu\overrightarrow{V_2}\right) = (\lambda\mu)\left(\overrightarrow{V_1}\Delta\overrightarrow{V_2}\right)$$

Soit $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ deux vecteurs unitaires, tels que

$$(\mathrm{O}x, \overrightarrow{u_1}) = \theta_1 \pmod{2\pi} \quad \text{et} \quad (\mathrm{O}x, \overrightarrow{u_2}) = \theta_2 \pmod{2\pi}.$$

Calculer $\overrightarrow{u_1}\Delta\overrightarrow{u_2}$ en fonction de θ_1 et de θ_2.
Démontrer que, si $(X_1 ; Y_1)$ et $(X_2 ; Y_2)$ sont les composantes respectives des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$ et $\overrightarrow{V_1}$ sur la base $\left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, on a

$$\overrightarrow{V_1}\Delta\overrightarrow{V_2} = X_{l1}Y_2 - X_2Y_1.$$

2. On donne dans le plan (Π) les points $M_1(X_1 ; Y_1)$, $M_2(X_2 ; Y_2)$, $M_3(X_3 ; Y_3)$ et $I(x ; y)$. Soit $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ les vecteurs libres de (Π) ayant pour représentants respectifs les vecteurs $\overrightarrow{IM_1}$, $\overrightarrow{IM_2}$ et $\overrightarrow{IM_3}$.
Calculer, en fonction de $x, y, X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3$ et Y_3 la somme

$$S = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{V_1}\Delta\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_2}\Delta\overrightarrow{V_3} + \overrightarrow{V_3}\Delta\overrightarrow{V_1}\right).$$

Le nombre réel S est indépendant du point I. On l'appellera l'aire algébrique du triangle orienté $M_1M_2M_3$ et on le notera $\overline{\text{Aire}\, M_1M_2M_3}$.

Démontrer que $\overline{\text{Aire}\, M_1M_2M_3} = 0$ si, et seulement si, les points M_1, M_2, M_3 sont alignés.

3. On donne dans le plan (Π) les points B$(2\,;\,0)$ et C$(0\,;\,1)$.

Soit $M(x\,;\,y)$ un point quelconque de (π), P, Q et R les symétriques respectifs de M par rapport aux droites BC, OC et OB.

Calculer $\overline{\text{Aire}\, PQR}$ en fonction de x et de y. Déterminer l'ensemble des points M du plan (Π) tels que $\overline{\text{Aire}\, PQR} = \lambda$, nombre réel donné.

Discuter suivant la valeur de λ. Étudier en particulier le cas $\lambda = 0$.

4. Soit (D) et (D') les droites de (Π) d'équations respectives $y = x \text{tg}\,\alpha$ et $y = -x \text{tg}\,\alpha \left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$, N et N' les projections orthogonales du point $M(x\,;\,y)$ sur (D) et (D').

Calculer $\overline{\text{Aire}\, MNN'}$ en fonction de x, y et α.

Déterminer l'ensemble (H) des points de (Π) tels que $\overline{\text{Aire}\, MNN'} = k$, nombre réel donné.

Discuter, suivant la valeur de k la nature de la courbe (H) et préciser les éléments qui permettent de la définir.