# Baccalauréat C Grenoble juin 1971

**EXERCICE 1**

$\mathbb{R}$ étant l'ensemble des nombres réels, on désigne par $f$ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} & \text{pour} \quad x < 0,\\ f(x) & = & 0 & \text{pour} \quad x \geqslant 0.\end{array}\right.$$

1. Montrer que la fonction $f$ est continue pour $x = 0$.
2. $f$ admet-elle une dérivée pour $x = 0$ ?

**EXERCICE 2**

$n$ étant un entier naturel, on pose

$$A_n = 2^n + 22^n + 23^n.$$

Montrer que, pour tout $n$, $A_{n+3}$ est congru à $A_n$ modulo 7.
En déduire les entiers $n$ tels que $A_n$ soit divisible par 7.
Les nombres qui, dans le système de numération à base deux, s'écrivent

1 110,

1 010 100,

1 001 001 000

sont-ils divisibles par 7 ?

**PROBLÈME**

On considère les deux fonctions de la variable $t$ définies par

$$a(t) = \frac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} \quad \text{et} \quad b(t) = \frac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

où e désigne la base des logarithmes népériens.

1. Démontrer les identités suivantes :

$$\begin{array}{lcl} a^2(t) - b^2(t) & = & 1,\\ a^2(t) + b^2(t) & = & a(2t) \text{ et}\\ 2a(t).b(t) & = & b(2t).\end{array}$$

2. *$t$ est fixé.* - Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\mathrm{O}x$, $y'\mathrm{O}y$, on définit la transformation ponctuelle $T_t$ qui, à tout point $M$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$, fait correspondre le point $M'$ de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ tel que

$$\begin{array}{lcl} x' & = & a(t)x + b(t)y,\\ y' & = & b(t)x + a(t)y.\end{array}$$

   **a.** Démontrer que la transformation $T_t$ est une application bijective du plan sur lui-même.
   Exprimer $x$ et $y$ en fonction de $x'$ et de $y'$.

   **b.** Déterminer les points doubles de cette transformation.

**c.** Soit $M'$ le transformé de $M$ par $T_t$ et $M''$ le transformé de $M'$ par $T_t$. Exprimer les coordonnées $(x'' ; y'')$ de $M''$ en fonction des coordonnées $(x ; y)$ de $M$.

**3.** $M'$ étant le transformé de $M$ par $T_t$ démontrer que, si $M'$ est en outre l'homologue de $M$ dans une homothétie de centre O et de rapport $\lambda$, $\lambda$ est solution de l'équation $\lambda^2 - 2\lambda a(t) + 1 = 0$.

Calculer les valeurs de $\lambda$.

En déduire que $M$ et $M'$ appartiennent à l'une ou l'autre de deux droites, que l'on déterminera.

**4.** Soit (D) la droite d'équation $ux + vy + h = 0$. Montrer que l'homologue de (D) par $T_t$ est une droite (D$'$).

Quelles sont les droites (D) qui sont parallèles à leur homologue (D$'$) ?

**5.** Soit A le point de coordonnées (+ 1 ; 0) et A$'$ le transformé de A par $T_t$. Déterminer les coordonnées $(\alpha ; \beta)$ de A$'$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ et les coordonnées de A$'$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ déduit du précédent par la rotation de centre O et d'angle $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

**6.** On considère le point, P, dont les coordonnées dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ sont $X = \text{e}^{-t}$ et $Y = \text{e}^{t}$.

Par quelle transformation se déduit-il du point A$'$ ?

En supposant que $t$ désigne le temps, construire la trajectoire (C) du point $P$.

On désigne par $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ les vecteurs vitesse et accélération du point $P$.

Déterminer l'ensemble des points, $S$, tels que $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{V}$. Comment peut-on déduire de (C) l'ensemble des points, $G$, tels que $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{\Gamma}$ ? Écrire l'équation de cet ensemble.

$r$ étant une longueur donnée, former l'équation permettant de déterminer à quelle date le mobile se trouve à une distance $r$ de l'origine O.

Pour certaines valeurs de $r$ il existe deux dates possibles, $t_1$ et $t_2$.

Quelle relation, indépendante de $r$, existe-t-il entre $t_1$ et $t_2$ ?

Résoudre l'équation dans le cas où $r = \sqrt{6}$.