

Durée : 4 heures

∞ Baccalauréat C Lille septembre 1971 ∞

EXERCICE 1

Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes le système d'équations .

$$\begin{cases} ix - y &= 1 - i, \\ -x + iy &= -1. \end{cases}$$

Déterminer les rotations d'angles $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ transformant le point M d'affixe x en le point P d'affixe y .

EXERCICE 2

Dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) , on envisage les cercles (C) de centre ω , de rayon R et (C') de centre ω' , de rayon R' . Les coordonnées de ω sont $x = -2$, $y = 2$, celles de ω' sont $x = 4$, $y = 5$. On a de plus $R = 1$ et $R' = 4$.

1. Construire les cercles (C) et (C') et écrire leurs équations.
2. Vérifier que le point H de coordonnées $x = 0$ et $y = 3$ a même puissance par rapport aux deux cercles (C) et (C') .
Donner l'équation de l'axe radical des deux cercles.
3. Montrer que le faisceau déterminé par les deux cercles (C) et (C') est un faisceau à points limites I et J . Calculer les coordonnées des points I et J .

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . On désigne par (P) l'ensemble des points du plan n'appartenant pas aux axes. On considère dans (P) la correspondance T_λ qui, au point M , de coordonnées x et y , associe le point M' , de coordonnées x' et y' , telles que

$$x' = \frac{\lambda}{y} \quad \text{et} \quad y' = \frac{\lambda}{x},$$

λ étant un nombre non nul.

Partie A

1. Montrer que T_λ est une bijection involutive de (P) sur (P) .
2. Quelle est, suivant le signe de λ , l'image par T_λ de chacune des quatre régions déterminées dans (P) par les axes de coordonnées ?
3. Quel est l'ensemble (E) des points de (P) invariants par T_λ ?
4. Montrer que O , M et M' sont alignés. Dans le cas où la droite (OMM') coupe (E) en deux points A et B , calculer le birapport (M, M', A, B) des quatre points M, M', A et B .

Partie B

Tout nombre réel non nul, λ , détermine une bijection T_λ . De même tout nombre réel, k , non nul, détermine une homothétie de centre O et de rapport $k : \mathcal{H}_k$. Soit \mathcal{F} l'ensemble dont les éléments sont les bijections T_λ et les homothéties \mathcal{H}_k [toutes définies sur (P)].

1. Démontrer que la composition des applications (notée \circ) est une loi interne dans \mathcal{F} .
2. Montrer qu'il existe un élément e de \mathcal{F} tel que, pour tout élément f de \mathcal{F} ,

$$e \circ f = f \circ e = f.$$

3. Montrer qu'à tout élément f de \mathcal{F} , on peut associer un élément f^{-1} de \mathcal{F} , tel que

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = e.$$

4. Montrer que la loi de composition des applications confère à \mathcal{F} une structure de groupe non commutatif.

Partie C

Soit (C) la courbe d'équation $y = e^x$.

1. Construire la courbe (C) dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) précédent. On appellera A le point d'abscisse 0 sur (C) .
2. On note T_1 la transformation T_λ pour $\lambda = 1$.
Quelle est l'équation $y = g(x)$ de la courbe (C') image de la courbe (C) privée du point A, par la transformation T_1 ?
3. Construire la courbe (C') . Étudier la limite de $\frac{g(x)}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs positives.
4. Quelle est l'image par T_1 de l'ensemble des points de (C) d'abscisse positive ; d'abscisse négative ?