Baccalauréat C Lyon juin 1971

EXERCICE 1

Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation

$$z^2 - 2(1+\cos a)z + 2(1+\cos a) = 0,$$

où z est l'inconnue et a un paramètre réel appartenant à l'intervalle $]-\pi~;~\pi]$.
Déterminer le module et l'argument de chacune des racines trouvées.

EXERCICE 2

a étant un entier relatif quelconque et n un entier naturel non nul, montrer que $a\left(a^{2n}-1\right)$ est divisible par 2 et par 3.
Application :
$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_p$, étant des entiers relatifs quelconques, montrer que le nombre

$$A = a_1^{2n+1} + a_2^{2n+1} + a_3^{2n+1} + \cdots + a_9^{2n+1}$$

est divisible par 6 si, et seulement si, le nombre

$$B = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p$$

est divisible par 6.

PROBLÈME

Dans le plan d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on désigne par $x'x$ et $y'y$ les droites portant l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées. Soit (P) le plan privé de l'union des droites $x'x$ et $y'y$. Soit m un point de (P) et H sa projection sur $x'x$; le cercle tangent en O à $x'x$ et passant par m recoupe la droite mH en M.
Soit T la transformation ponctuelle qui, à un point m de (P), donne pour homologue le point M construit comme il vient d'être dit.

1. Montrer que T est une bijection involutive de (P) sur (P). Montrer que les coordonnées $(x~;~y)$ de m et $(X~;~Y)$ de M sont liées par $x = X$ et $yY = x^2$?
   Quel est l'ensemble des points doubles de T ?
2. (C) étant l'intersection avec (P) d'un cercle tangent à $x'x$ en O, montrer que (C) est invariant par T. Les tangentes à (C) en m et M (homologue de m par T) coupent $x'x$ respectivement en s et S. Montrer que $(H,\ \mathrm{O},\ s,\ S)$ est une division harmonique.
3. (γ) étant une courbe incluse dans (P), d'équation $y = f(x)$, soit $y = g(x)$ l'équation de son homologue (γ) par T. Soit m un point de (γ) d'abscisse x_0, M son homologue.
   Montrer que, si la fonction f est dérivable pour la valeur x_0, g est dérivable pour x_0 et l'on a

   $$f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0) = 2x_0.$$

   Calculer les coordonnées des points s et S où les tangentes à (γ) en m et à (Γ) en M coupent, respectivement $x'x$.
   Montrer que $(H,\ \mathrm{O},\ s,\ S)$ est une division harmonique. Étudier le cas où l'une des deux tangentes est parallèle à $x'x$.

Supposant donnés m et la tangente à (γ) en m, tracer la figure montrant la construction de M et de la tangente à (Γ) en M, en justifiant brièvement les constructions effectuées.

4. Soit (γ) l'intersection avec (P) de la courbe d'équation $y = \text{Log}\, x$. (Log x désigne le logarithme népérien de x.)

Quelle est l'équation de (Γ), homologue de (γ) par T ? Cette équation étant mise sous la forme $y = g(x)$, étudier les variations de g et tracer (Γ).