Durée : 4 heures

Baccalauréat C Lyon septembre 1971

EXERCICE 1

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par

$$x \longmapsto f(x) = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}.$$

1. Étudier les variations de cette fonction. Construire le graphe (C) dans un repère orthonormé.
2. Déterminer l'aire $S(m)$ du domaine limité par la courbe (C) et les trois droites d'équations respectives

$$y = x, \quad x = 1, \quad x = m,$$

   m étant un réel strictement positif.
3. Quelle est la limite de $S(m)$ quand $m \to +\infty$?

EXERCICE 2

1. a étant un entier naturel, montrer que $a^5 - a$ est divisible par 10.
2. Montrer que, si $a^5 - b^5$ est divisible par 10, $a^2 - b^2$ est divisible par 20 (a et b sont des entiers naturels, tels que $a \geqslant b$).
3. Déterminer les entiers a et b satisfaisant à l'hypothèse de la deuxième question et à l'égalité

$$a^2 - b^2 = 720.$$

PROBLÈME

Partie A

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé d'origine O. Soit a un réel strictement positif et k un réel non nul.

1. Étudier suivant les valeurs du réel m la nature de la courbe (L_m) d'équation

$$y^2 = (m-1)x^2 + \frac{k}{2a}x.$$

2. On note $(\mathrm{P}^\star)$ l'ensemble (P) privé du point O.
   Soit J la transformation ponctuelle définie sur $(\mathrm{P}^\star)$ qui au point M d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 tel que $z_1.\overline{z} = k$.
   Démontrer que O, M et M_1 sont alignés. Calculer $\mathrm{O}M \,.\, \mathrm{O}M_1$ et en déduire la nature de la transformation J.

3. Soit (Γ_m) la courbe transformée de $(L_m) \cap \left(\mathrm{P}^{\star}\right)$ par la transformation J.
Montrer que les coordonnées $(X_1\ ;\ Y_1)$ d'un point M_1 de (Γ_m) vérifient la relation

$$y_1^2 = (m-1)x_1^2 + \frac{x_1}{2a}\left(x_1^2 + y_1^2\right)$$

.

Réciproquement, montrer que les points de $\left(\mathrm{P}^{\star}\right)$ dont les coordonnées vérifient la relation ci-dessus appartiennent à (Γ_m).
Étudier le cas où $m = 0$.

Partie B

Le paramètre a étant comme ci-dessus un réel strictement positif, on désigne par (D) la droite d'équation $x = 2a$.
On note (E) l'ensemble (P) privé des deux droites $x = 0$ et $x = 2a$

$$(\mathrm{E}) = (\mathrm{P}) - (y'y) \cup (D).$$

A tout point N de (E) on associe le point N', tel que $\overrightarrow{\mathrm{O}N'} = \overrightarrow{N\mathrm{Q}}$, Q étant le point d'intersection de (D) avec ON.
On définit ainsi une transformation T de (E) dans $\left(\mathrm{P}^{\star}\right)$, qui à N fait correspondre le point $N' = T(N)$.

1. Cette transformation T est-elle involutive ? Quel est l'ensemble des points doubles de T ?

2. Déterminer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ de $N' = T(N)$ en fonction des coordonnées $(x\ ;\ y)$ de N.

3. **a.** Soit (C_m) le transformé par T de la courbe (Γ_m) pour $m \neq 0$. Montrer que $(C_m) = \left(C'_m\right) \cap \mathrm{E}$, où $\left(C'_m\right)$ est un cercle, dont on déterminera l'équation.

b. Quand m parcourt le corps des réels privé de 0, décrire l'ensemble des cercles $\left(C'_m\right)$.
Quel est l'ensemble des transformés des courbes (L_m) par $J \circ T \circ J$?

N. B. – Si z est un nombre complexe, $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugueé.