Baccalauréat C Maroc juin 1971

EXERCICE 1

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & x^2\text{Log}\,|x| \quad \text{si } x \neq 0 \\ f(0) & = & 0. \end{array}\right.$$

1. f est-elle continue au point 0 ?
2. Étudier la fonction f ; construire dans un repère orthonormé la courbe d'équation $y = f(x)$.

EXERCICE 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère le mouvement d'un point M dont les coordonnées en fonction du temps t sont cos t

$$\left\{\begin{array}{lclcl} x & = & f(t) & = & p\dfrac{\cos t}{1-\cos t} \\ y & = & g(t) & = & \dfrac{\sin t}{1-\cos t} \end{array}\right.$$

p étant un nombre positif donné et t variant entre 0 et 2π $(0 < t < 2\pi)$.

1. Trajectoire (P) de M.
2. Soit M_1 le point de (P) dont les coordonnées x_1 et y_1 sont données par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & f(t+\pi), \\ y_1 & = & g(t+\pi). \end{array}\right.$$

   Donner en fonction de t, les coordonnées de M_1.
   Montrer que M, O et M_1 sont alignés.
3. Quelle est la trajectoire du milieu, I, de MM_1 quand t varie entre 0 et 2π ?

EXERCICE 1

Partie A

Deux nombres complexes $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ ont pour arguments respectifs θ et θ' (mod. 2π).
Établir les équivalences suivantes :

$$\left(\frac{z}{z'}\ \text{réel}\right) \iff \theta' - \theta = 0 \quad (\text{mod } \pi),$$

$$\left(\frac{z}{z'}\ \text{imaginaire pur}\right) \iff \theta' - \theta = \frac{\pi}{2} \quad (\text{mod } \pi).$$

Partie B

À tout nombre complexe z on associe, lorsque cela est possible, le nombre complexe z' tel que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ soit réel et $\dfrac{z}{z'}$ imaginaire pur.
On désigne par M et M' les images de z et z' et par A le point (+ 1 ; 0).

1. On suppose que M' existe. Démontrer, en utilisant les résultats de la question A, que

$$\left(\frac{z'-1}{z-1}\ \text{réel}\right) \iff (\text{A}MM'\ \text{sont alignés})$$

et

$$\left(\frac{z}{z'}\ \text{imaginaire pur}\right) \iff (\text{les droites O}M\ \text{et O}M'\ \text{sont perpendiculaires}).$$

2. Construire M' lorsque M est donné et déterminer géométriquement l'ensemble (C) des points M pour lesquels M' n'existe pas.

Partie C

On se propose de retrouver analytiquement les résultats de la question B. On pose

$$z = x + \text{i}y \quad \text{et} \quad z' = x' + \text{i}y'.$$

1. Écrire la condition nécessaire et suffisante pour que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ soit réel.

2. Écrire la condition nécessaire et suffisante pour que $\dfrac{z}{z'}$ soit imaginaire pur.