Baccalauréat C Montréal et New York juin 1971

EXERCICE 1

Discuter, suivant les valeurs du paramètre m, le nombre de racines de l'équation

$$e^{2x} - 2me^{x} + 2m + 8 = 0.$$

(On pourra poser $e^{x} = X$.)
Achever la résolution pour $m = 6$ (on ne demande pas de donner des valeurs décimales approchées des racines).

EXERCICE 2

On donne trois nombres réels distincts a, b et c, avec $a \neq 0$.
Sachant que les trois nombres a, b et c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique et que les trois nombres $3a, 2b$ et c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, calculer la raison de la suite géométrique.

PROBLÈME

On considère, dans un plan rapporté à un repère orthonormé $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$, l'ensemble des cercles (C) tangents à $x'\mathrm{O}x$. On se propose de transformer ces cercles (C) dans l'inversion de pôle O et de puissance $4a^2$ $(a > 0)$.
On désignera par M le centre de (C) et par x_0 et y_0 ses coordonnées.

1. Quels sont les cercles (C) qui ont pour inverses des droites ?
   Quel est l'ensemble de leurs centres M ?
   Dans toute la suite du problème, on ne considère que des cercles (C) dont le centre M n'est pas situé sur $y'\mathrm{O}y$ $(x_0 \neq 0)$. Tout cercle (C) a alors pour inverse un cercle (C$'$) de centre M$'$ dont les coordonnées sont X_0 et Y_0.
2. **a.** Démontrer que l'on a les relations suivantes :

   $$X_0 = \frac{4a^2}{x_0} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{4a^2 y_0}{x_0}.$$

   b. Quels sont les cercles (C) globalement invariants dans l'inversion considérée ? Quel est l'ensemble de leurs centres ?
3. On suppose que le point M décrit la parabole (P) d'équation

   $$y = \alpha x^2 + \beta,$$

   où α et β désignent deux constantes.

   a. Quelle valeur faut-il donner à β pour que tous les cercles (C$'$) aient le même rayon ?

   b. Quelle relation doit-il exister entre α et β pour que le point M$'$ appartienne comme M à la parabole (P) ?
4. Dans toute cette quatrième question, le point M décrit la droite (D) d'équation

   $$y = mx + p,$$

   où m et p désignent deux constantes non nulles ($m \neq 0$ et $p \neq 0$).

a. Quel est l'ensemble des points M' ? Démontrer géométriquement que les cercles (C') sont tangents non seulement à $x'Ox$, mais aussi à un cercle fixe (Γ) et qu'ils sont orthogonaux à un autre cercle fixe (Ω).

Dans le cas particulier où $m = 1$ et $p = -2a$, déterminer le centre et le rayon des cercles (Γ) et (Ω).

b. A et B désignent les points de (D) d'ordonnées respectives p et $-p$. On considère deux cercles appartenant à l'ensemble des cercles (C), soit (C_1) et (C_2), de centres respectifs M_1 et M_2 situés sur (D) et tels que le birapport (A, B, M_1, M_2) vérifie la condition

$$(A, B, M_1, M_2) = -1.$$

Montrer que les centres des cercles (C'_1) et (C'_2), inverses des cercles (C_1) et (C_2), ont même ordonnée.