Baccalauréat C Nancy juin 1971

EXERCICE 1

Déterminer tous les entiers naturels n tels que

$$5^n - 2 \equiv 0 \quad [7].$$

EXERCICE 2

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ les coordonnées d'un point mobile M sont données en fonction du temps t par

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 2+4\sin t\cos t,\\ y & = & 1+\cos 2t.\end{array}\right.$$

1. Donner une équation cartésienne de la trajectoire de M et la construire.

2. Définir, à l'instant t, le vecteur vitesse de M et le vecteur accélération. Construire le point M, le vecteur vitesse de M et le vecteur accélération de M 7t pour $t = \dfrac{\pi}{6}$.

PROBLÈME

Soit E l'ensemble des fonctions réelles f, définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0.$$

1. **a.** Démontrer qu'une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ appartient à E si, et seulement si, la fonction g définie par $x \longmapsto \text{e}^{-x}f(x)$ est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $g''(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. À tout couple $(\lambda,\ \mu)$ de nombres réels on fait correspondre la fonction réelle $f_{\lambda,\ \mu}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_{\lambda,\ \mu}(x) = (\lambda + \mu x)\text{e}^x.$$

Montrer que, pour toute fonction f de E, il existe un couple $(\lambda,\ \mu)$ et un seul tel que $f = f_{\lambda,\ \mu}$.

- Dans la suite du problème on appellera « coordonnées de f » ce couple $(\lambda,\ \mu)$.

c. Étudier les fonctions $f_{1,\ 0}$ et $f_{0,\ 1}$; construire leurs courbes représentatives $\left(C_{1,\ 0}\right)$ et $\left(C_{0,\ 1}\right)$ dans un même plan rapporté à un repère orthonormé. Étudier la position relative des deux courbes.

2. **a.** Montrer que la dérivée de toute fonction f de E appartient aussi à E et déterminer les coordonnées de f' en fonction de celles de f.

En désignant par D l'application de E dans E qui à toute fonction $f \in$ E associe sa dérivée, montrer que D est une bijection et définir l'application D^{-1}.

b. Déduire de ce qui précède une primitive de $f_{\lambda,\ \mu}$.

Calculer l'aire a_m de la partie du plan limitée par les courbes $\left(C_{1,\ 0}\right)$, $\left(C_{0,\ 1}\right)$ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = -m$, où m désigne un nombre réel positif. L'aire a_m a-t-elle une limite lorsque m tend vers $+\infty$?

3. **a.** Soit a un nombre réel donné. À toute fonction f de E on associe la fonction que l'on notera f_a, définie sur $\mathbb{R}$ par $f_a(x) = f(x+a)$.

Démontrer que f_a appartient à E et déterminer ses coordonnées en fonction de celles de f.

Soit T_a l'application de E dans E qui à toute fonction $f \in$ E associe la fonction f_a.

b. Montrer que l'on a

$$T_a \circ T_b = T_{a+b},$$

quels que soient les nombres réels a et b.

Définir la fonction $T_a\left(f_{1,\,0}\right)$ et la comparer avec la fonction $f_{1,\,0}$.

En déduire que $T_a = T_0$ implique $a = 0$ et que, par suite, $T_a = T_b$ si, et seulement si, $a = b$.