Baccalauréat C Nice juin 1971

EXERCICE 1

On considère le nombre complexe

$$Z = \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

sachant que $Z = x + \mathrm{i}y$ et que x et y sont des réels et z différent de $-\mathrm{i}$.

1. Donner l'expression de Z sous la forme $a+\mathrm{i}b$, a et b étant réels. Quelles conditions nécessaires et suffisantes les nombres x et y doivent-ils vérifier pour que Z soit un imaginaire pur, c'est-à-dire de la forme $\mathrm{i}b$, b n'étant pas nul ?
2. Dans le plan complexe on désigne par M le point d'affixe z. Quel est l'ensemble des points M dans les conditions trouvées à la question précédente ?

EXERCICE 2

1. On pose $Y = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x$.
   Quelle est la limite de Log Y lorsque x tend vers $-\infty$?
   En déduire la limite de Y lorsque x tend vers $-\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = \left(x^2+1\right)\mathrm{e}^x$.
   Construire la représentation graphique de cette fonction dans un repère orthonormé (unité de longueur : 3 cm sur les deux axes).
3. Calculer les nombres a, b et c tels que la fonction F déterminée par $F(x) = \left(ax^2+bx+c\right)\mathrm{e}^x$ soit une primitive de f.
   En déduire l'aire, en centimètres carrés, du domaine plan défini par les relations

$$-4 \leqslant x \leqslant 0 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant y \leqslant f(x).$$

PROBLÈME

Dans un plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ on considère la transformation ponctuelle, T, définie par

$$\forall M \in (P), \quad M(x\ ;\ y) \overset{T}{\longmapsto} M'\left(x'\ ;\ y'\right)$$

tel que l'on ait

$$x' = x - y\sqrt{2} \quad \text{et} \quad y' = x\sqrt{2} - y.$$

1. Montrer que T est une application bijective du plan vers lui-même et qu'elle admet un point invariant. Déterminer la transformation T^{-1} réciproque de T.
2. On se propose de démontrer que la transformation T est le produit de deux affinités de rapport -1.
   À cet effet, M étant un point quelconque du plan de coordonnées x et y, calculer les coordonnées x_1 et y_1 de son image, M_1 dans l'affinité ayant pour axe la droite $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$, pour direction Oy et pour rapport -1.
   Démontrer ensuite que M' est l'image de M_1 dans une deuxième affinité de direction Ox et de rapport -1, dont on précisera l'axe.

3. Montrer que la transformée par T de la droite (D) d'équation $y = mx + p$ est une droite (D'), dont on formera l'équation.

Existe-t-il des droites (D) parallèles à leurs transformées (D') ?

Montrer que, si deux droites (D_1) et (D_2) sont parallèles, leurs transformées $\left(D'_1\right)$ et $\left(D'_2\right)$ sont aussi parallèles.

Déterminer m pour que (D') soit perpendiculaire à (D).

4. Soit (D) la droite d'équation $y = mx - 1$ et (D') sa transformée par T. Montrer que (D) et (D') passent chacune par un point fixe quand m varie.

Calculer les coordonnées x et y du point d'intersection, M, de (D) avec (D') en fonction de m et en déduire que la courbe (E) décrite par M quand m varie a pour équation

$$x^2 - xy\sqrt{2} + y^2 - x\sqrt{2} + y = 0.$$

5. En prenant pour nouvelle origine $\omega\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ 0\right)$ et pour nouveaux vecteurs unitaires $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ tels que

$$\left(\overrightarrow{\imath}\,,\ \overrightarrow{I}\right) = \left(\overrightarrow{\jmath}\,,\ \overrightarrow{J}\right) = \frac{\pi}{4},$$

établir les formules donnant les anciennes coordonnées x et y d'un point M quelconque en fonction de ses nouvelles coordonnées X et Y.

En déduire une équation de la courbe (E) dans le nouveau repère. Reconnaître la nature de (E) et déterminer ses éléments géométriques.