Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Nice septembre 1971 ∾

EXERCICE 1

1. On considère la fonction réelle f_1 de la variable réelle x suivante :

$$\left\{\begin{array}{l c l l} f_1(x) & = & x^2 - \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1} & \text{si } x \neq 1\\ f_1(1) & = & 2. & \end{array}\right.$$

a. Étudier la continuité de f_1 pour la valeur $x = 1$.

b. Faire l'étude et tracer la courbe représentative de f_1 en repère orthonormé.

2. Mêmes questions pour la fonction f_2 suivante :

$$\left\{\begin{array}{l c l l} f_2(x) & = & \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{|x-1|} & \text{si } x \neq 1\\ f_2(1) = 0. & & & \end{array}\right.$$

EXERCICE 2

À l'aide des tables de logarithmes à cinq décimales, résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{l l c l} (1) & 4^x\,.\,5^y & = & 5^{2x+1}\\ (2) & 12^x\,.\,8^y & = & 5^{2y-1}. \end{array}\right.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy.

Partie A

À tout réel a on associe la translation notée (T_a) de vecteur directeur $\overrightarrow{V}\,(a\,;\,a)$. Dans la translation (T_a), $M(x\,;\,y)$ a pour image $M'(x+a\,;\,y+a)$.
Montrer que l'ensemble de ces translations muni de la loi de composition ordinaire qui sera notée 0 pour les applications, a une structure de groupe commutatif.

Partie B

À tout nombre réel b on associe la transformation ponctuelle notée $(\mathcal{T}_b)$ qui à $M(x\,;\,y)$ fait correspondre $M'(y-1+b\,;\,x+1+b)$.

1. Montrer que toute transformation $(\mathcal{T}_b)$ est une isométrie, c'est-à-dire que, M' et N' étant les images de deux points quelconques M et N, on a $M'N' = MN$.

2. Montrer que, parmi toutes les transformations du paragraphe B, une, et une seule, a des points invariants.

3. Montrer que l'on a

$$(\mathcal{T}_a)\circ(\mathcal{T}_b) = (\mathcal{T}_b)\circ(\mathcal{T}_a) = T_{a+b}$$

et

$$(\mathcal{T}_b)\circ(T_a) = (T_a)\circ(\mathcal{T}_b) = \mathcal{T}_{a+b}$$

Partie C

Montrer que l'ensemble comprenant les translations du paragraphe A et les transformations du paragraphe B, muni de la loi de composition des applications, a une structure de groupe commutatif.

Partie D

On considère la transformation $(\mathscr{T}_0)$ associée au nombre 0 qui à $M(\alpha\ ;\ \beta)$ fait correspondre $M'(\beta - 1\ ;\ \alpha + 1)$.
Soit (D) l'ensemble de ses points invariants. Construire (D).

1. Montrer que $(\mathscr{T}_0)$ est la symétrie par rapport à la droite (D).
2. Montrer que toute transformation $(\mathscr{T}_b)$ est le produit d'une symétrie droite et d'une translation.

N. B. - La question D 2. peut être résolue avant les autres.