Durée : 4 heures

Baccalauréat C Paris septembre 1971

EXERCICE 1

On considère l'entier naturel représenté, en base b, par

$$n = \overline{342x}.$$

Déterminer le chiffre x pour que ce nombre soit

1. divisible par 5 quand $b = 6$;
2. divisible par 3 quand $b = 7$;
3. divisible par 12 quand $b = 17$.

EXERCICE 2

Le plan (P) étant rapporté à un repère orthonormé d'axes Ox, Oy (unité = 2 cm), tout point $m(x\,;\,y)$ a pour affixe $z = x + \text{i}y$.
On note $\left(\text{P}^{\star}\right)$ l'ensemble des points de (P) d'affixe z non nulle, et l'on considère l'application f de $\left(\text{P}^{\star}\right)$ dans (P)

$$m \text{ (d'affixe } z) \longmapsto f(m) = M \quad \left(\text{d'affixe } Z = z - \frac{1}{z}\right)$$

1. Exprimer les coordonnées X et Y du point M en fonction des coordonnées x et y du point m, puis en fonction du module r et de l'argument θ de l'affixe z de m.
2. Montrer que la transformée par f d'un cercle de centre O et de rayon $R \neq 1$ est une ellipse ; déterminer les foyers de cette ellipse.
3. Dessiner cette ellipse pour $R = 2$.

PROBLÈME

Dans un plan euclidien orienté, on donne un triangle équilatéral direct OO$'$O$''$ de centre I et de côté égal à l'unité de longueur (direct veut dire que O$'$ se déduit de O par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On désigne par Ω le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{\text{OO}'}, \overrightarrow{\text{OO}''}\right)$ d'origine O et de vecteurs unitaires $\overrightarrow{\text{OO}'}$ et $\overrightarrow{\text{OO}''}$ par Ω' le repère $\left(\text{O}', \overrightarrow{\text{O}'\text{O}''}, \overrightarrow{\text{O}'\text{O}}\right)$, par Ω'' le repère $\left(\text{O}'', \overrightarrow{\text{O}''\text{O}}, \overrightarrow{\text{O}''\text{O}'}\right)$.
On appelle E l'ensemble des points intérieurs au triangle OO$'$O$''$ (y compris les points des côtés). Soit e l'ensemble des triplets $(a,\ b,\ c)$ de nombres réels positifs ou nuls et tels que

$$a + b + c = 1.$$

À tout triplet de e, on associe le triplet (A, B, C) des points du plan dont les coordonnées par rapport au repère ω sont $(b\,;\,c)$ pour A, $(c\,;\,a)$ pour B et $(a\,;\,b)$ pour C.

1. **a.** Démontrer que l'application f de e dans le plan, qui, au triplet (a, b, c), associe le point A, est une bijection de e sur E.

   b. Démontrer que

- la rotation $R\left(\mathrm{I},\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$ de centre I et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ transforme le repère Ω en le repère Ω' ;
- si un point a pour coordonnées $(x\ ;\ y)$ relativement à Ω, alors il a $(y\ ;\ 1-x-y)$ pour coordonnées relativement à Ω' ;
- les coordonnées du point A relativement à Ω' sont $(c\ ;\ a)$.

c. Quel est le point dont le transformé par $R\left(\mathrm{I},\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$ est le point A ?

En déduire que le triangle ABC est équilatéral indirect.

2. Trouver et dessiner l'ensemble (D) des points A, B et C correspondant aux triplets (a, b, c) de e tels que $|b-c| = \dfrac{1}{2}$.

3. On se propose de trouver l'ensemble (G) des points A, B et C correspondant aux triplets de e tels que $a^2+b^2+c^2 = \dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que le carré scalaire $\left\|\overrightarrow{V}\right\|^2$ d'un vecteur $\overrightarrow{V}$, de coordonnées $(x\ ;\ y)$ par rapport au repère Ω, est

$$\left\|\overrightarrow{V}\right\|^2 = x^2+y^2+xy.$$

b. Calculer les coordonnées, par rapport à Ω, du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IA}}$.

c. Calculer IA^2 et montrer que, pour les triplets considérés dans cette question, $\left\|\overrightarrow{\mathrm{IA}}\right\|^2$ est constant. Dessiner avec précision l'ensemble (G) cherché.

4. Soit $(a_0,\ b_0,\ c_0) \in e$; on considère le triplet $(a_1,\ b_1,\ c_1)$ défini par

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(b_0+c_0\right), \quad b_1 = \frac{1}{2}\left(c_0+a_0\right), \quad c_1 = \frac{1}{2}\left(a_0+b_0\right),$$

puis, par récurrence, les triplets $(a_2,\ b_2,\ c_2)$, $\quad (a_3,\ b_3,\ c_3), \ldots, (a_n,\ b_n,\ c_n), \ldots$ en posant

$$a_n = \frac{1}{2}\left(b_{n-1}+c_{n-1}\right), \quad b_n = \frac{1}{2}\left(c_{n-1}+a_{n-1}\right) \text{ et } c_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1}+b_{n-1}\right).$$

a. Vérifier que, quel que soit n, on a $(a_n,\ b_n,\ c_n) \in e$.

b. On appelle alors $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n\mathrm{C}_n$ le triangle associé au triplet $(a_n,\ b_n,\ c_n)$ de même que ABC était associé à (a, b, c).

Quel est le point A_1 pour le triangle $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0\mathrm{C}_0$? En déduire que A_1 se déduit de A_0 par une homothétie, que l'on précisera.

c. Que peut-on dire des points A_n, B_n et C_n lorsque n tend vers l'infini ?

Que peut-on en déduire pour les nombres a_n, b_n, c_n lorsque n tend vers l'infini ?