Baccalauréat C Pondichéry juin 1971

EXERCICE 1

Déterminer le chiffre des unités des différentes puissances de 2, écrites dans le système décimal.
Répondre à la même question pour les puissances de 7.
Application : Déterminer le chiffre des unités du nombre

$$(3\,548)^9 \times (2\,537)^{31}.$$

EXERCICE 2

$\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels, $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels strictement supérieurs à 2. On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel x de $\mathbb{R}$ associe le nombre réel y défini par

$$y = f(x) = \frac{2x^2 - 7x - 9}{x - 2}$$

Montrer que f admet une application réciproque f^{-1}, que l'on définira.
Tracer dans un même plan rapporté à un repère orthonormé les représentations graphiques des applications f et f^{-1}.

PROBLÈME

On donne, dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\mathrm{O}x$ et $y'\mathrm{O}y$, le cercle (C) de centre O et de rayon a et la droite (D) d'équation $x = 2a$.
λ étant un nombre réel non nul quelconque ($\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$), on prend sur (D) les points M d'ordonnée λ et N d'ordonnée $-\dfrac{3a^2}{\lambda}$.

1. **a.** Former l'équation du cercle (Γ) de diamètre MN.
   Montrer qu'il est orthogonal à (C) et qu'il passe par deux points fixes quand λ varie dans $\mathbb{R} - \{0\}$.

   b. Former l'équation des polaires de M et de N par rapport à (C).
   Montrer qu'elles passent par un point fixe B quand λ varie, et préciser la position de B.

2. **a.** (Δ) désignant la première bissectrice des axes, on appelle x et y les coordonnées d'un point m du plan $x\mathrm{O}y$, x' et y' les coordonnées du symétrique m' de m par rapport à (Δ) et $(X_0~;~Y_0)$ les coordonnées du symétrique M_0 de m' par rapport à l'axe $x'\mathrm{O}x$.
   Exprimer X_0 et Y_0 en fonction de x et de y.
   Par quelle transformation simple T_0 passe-t-on de m à M_0 ?

   b. θ étant un nombre réel donné, appartenant à l'intervalle $[0~;~2\pi[$, on lui associe la transformation, T, du plan dans lui-même qui fait correspondre au point $m(x~;~y)$ le point $M(X~;~Y)$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l c l} X &=& x\sin\theta + y\cos\theta,\\ Y &=& -x\cos\theta + y\sin\theta.\end{array}\right.$$

   Déterminer le point double de T et reconnaître la transformation T parmi les types de transformations étudiés dans le programme.
   Existe-t-il une valeur du paramètre θ ($\theta \in [0~;~2\pi[$) telle que la transformation T qui lui est associée soit la transformation T_0 ?

c. Que deviennent le cercle (C), le cercle (T) et le point B dans la transformation T_0 ?

3. Soit S la transformation du plan dans lui-même qui fait correspondre au point $m(x\,;\,y)$ le point P dont les coordonnées u et v sont définies par les relations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l c l} u & = & \dfrac{a}{2}+Y,\\ v & = & \dfrac{a}{2}-X\end{array}\right.$$

a. Déterminer le point double de S et définir géométriquement cette transformation.

b. On désigne par $w = u + \mathrm{i}v$ l'affixe du point P et par $z = x + \mathrm{i}y$ l'affixe du point m.

Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que $w = \alpha z + \beta$ et retrouver les résultats de la question 3. a. précédente.

c. Le cercle (Γ) a pour transformé par S le cercle $\left(\Gamma'\right)$.

Déterminer les points fixes par lesquels passe le cercle $\left(\Gamma'\right)$ lorsque λ varie dans $\mathbb{R}-\{0\}$.