Durée : 4 heures

Baccalauréat C Rennes septembre 1971

EXERCICE 1

À tout couple $(x,\ n)$ d'entiers x et n supérieurs ou égaux à deux, on associe le nombre entier, noté $a(x,\ n)$, qui, dans le système de numération de base x, s'écrit avec n chiffres dont le premier et le dernier sont des 1 et les autres (s'il y en a) des 0.
Ainsi, a(trois, deux) s'écrit 11 en base « trois », c'est l'entier « quatre » ; a(trois, trois) s'écrit 101 en base « trois », c'est l'entier « dix ».

1. Montrer que, quelle que soit la base x, $a(x,\ n)$ est divisible par $a(x$, deux) si n est pair et ne l'est pas si n est impair.
2. À quelles conditions doivent satisfaire les entiers x et n pour que le nombre $a(x,\ n)$ soit divisible par le nombre « trois » ?

EXERCICE 2

Dans un plan rapporté à un système orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, la position d'un point mobile à l'instant t, $M(t)$ est définie par ses coordonnées

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \text{e}^{\sin t},\\ y(t) & = & \text{e}^{\cos t},\end{array}\right.$$

pour t variant de 0 à 2π.

1. En se déplaçant sur sa trajectoire, le point mobile rencontre la droite d'équation $y = 1$ en quatre points A, B, C et D, dont on déterminera les coordonnées. Quelles sont les dates de passage en chacun des points A, B, C et D ?
2. Déterminer le vecteur vitesse du point mobile aux différentes dates de passage en chacun des points A, B, C et D.

PROBLÈME

1. λ désignant un nombre réel donné non nul, on considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $x'\text{O}x$, $y'\text{O}y$, la transformation ponctuelle T_λ qui fait correspondre au point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ le point M de coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$, telles que

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x\\ y' & = & x^2+\lambda y.\end{array}\right.$$

   a. Montrer que T_λ est une bijection du plan sur lui-même.
   b. Trouver les points doubles de T_λ.
   c. Quelle est la transformée par T_λ d'une droite d'équation $ux+vy+w=0$?

2. **a.** Soit (Γ_1) et (Γ_2) les courbes d'équations respectives

$$y = f_1(x) = x^2+2|x-1|$$

et

$$y = f_2(x) = x^2+2\text{e}^x.$$

Étudier les variations des fonctions f_1 et f_2 et construire les courbes (Γ_1) et (Γ_2)

(On montrera que l'équation $f_2'(x) = 0$ a une racine, dont on donnera une valeur approchée.)

b. Soit A l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x\;;\;y)$ dont l'abscisse x est comprise entre -1 et 1 et dont l'ordonnée y est comprise entre $f_1(x)$ et $f_2(x)$. Calculer l'aire de A.

3. **a.** (Γ_1) et (Γ_2) sont les images par T_2 de deux courbes (C_1) et (C_2) du plan. Quelles sont les équations de (C_1) et (C_2) :

$$y = g_1(x) \quad \text{et} \quad y = g_2(x)\,?$$

b. Soit g la fonction définie par

$g(x) = g_1(x)$ pour tout réel x pour lequel $g_1(x) \geqslant g_2(x)$,

$g(x) = g_2(x)$ pour tout réel x pour lequel $g_1(x) < g_2(x)$

et soit (C) la courbe d'équation $y = g(x)$.

Quelle est la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telle que $y = f(x)$ soit l'équation de la courbe (Γ)transformée de (C) par T_2 ?

Montrer que f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Déterminer la primitive Φ de f telle que $\Phi(1) = 0$.

En déduire l'aire du domaine limité par l'axe $x'\mathrm{O}x$, les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$ et la courbe (Γ).