

œ Baccalauréat C Toulouse juin 1971 œ

EXERCICE 1

Déterminer tous les couples $(a; b)$ d'entiers naturels ($a \geq b$) tels que $a^2 - b^2 = 1620$ et que le plus grand commun diviseur de a et de b soit 6.

EXERCICE 2

1. Déterminer les nombres complexes z tels que $z^2 = -2i$.
(On donnera les formes trigonométrique et algébrique des nombres trouvés.)
2. Trouver les nombres complexes, racines de l'équation du second degré,

$$x^2 - 2(3 + 2i)x + 5 + 14i = 0.$$

3. Soit l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + 15 + 42i = 0,$$

où a et b sont deux nombres réels. Les déterminer pour que cette équation admette le nombre complexe $2 + 3i$ pour solution. (On ne demande pas les autres solutions.)

PROBLÈME

Partie A

Un plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) ; $x'Ox$ est l'axe des abscisses et $y'Oy$ celui des ordonnées.

1. Soit E l'ensemble des points de $x'Ox$ d'abscisse différente de zéro. On considère l'application T de E dans $x'Ox$ définie par la relation

$$x' = -\frac{15}{x} + 8$$

x étant l'abscisse d'un point M de E et x' l'abscisse du point associé M' tel que $T(M) = M'$.

Est-ce que T est bijective? Démontrer qu'il existe deux points A et B de E tels que $T(A) = A$ et $T(B) = B$. (On choisit l'abscisse de A inférieure à celle de B .)

2. Soit $(\mathcal{P}^*) = (\mathcal{P}) - \{O\}$. On considère l'application \mathcal{F} de (\mathcal{P}^*) dans (\mathcal{P}) , produit de l'inversion \mathcal{I} de pôle O et de puissance k par la translation \mathcal{T} de vecteur $\delta \vec{i}$; donc $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{I}$.

Déterminer k et δ pour que T soit la restriction de \mathcal{F} à E , c'est-à-dire que, pour tout point M de E , $\mathcal{F}(M) = T(M)$. Dans la suite k et δ sont les nombres ainsi déterminés.

Calculer les coordonnées x' et y' du point M' transformé par \mathcal{F} d'un point M de coordonnées x et y .

3. a. Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{15}$.
On appelle cercle (C) tout cercle, autre que (Γ) , invariant dans \mathcal{I} . Démontrer que tout cercle (C) coupe (Γ) en deux points diamétralement opposés.

- b.** Démontrer que l'ensemble F des cercles (C) passant par le point $U(+1; +2)$ est un faisceau à points de base, et calculer les coordonnées du deuxième point de base V .
Trouver géométriquement le transformé F' de l'ensemble F par la transformation \mathcal{F} .
- c.** Vérifier que le vecteur $\vec{u}(-2; +1)$ est un vecteur directeur de la médiatrice (Δ) du segment $[UV]$.
Soit I le milieu du segment $[UV]$ et ω le point de (Δ) défini par $\vec{I\omega} = t\vec{u}$, t étant un réel. Calculer les coordonnées de ω et former l'équation du cercle (C) de F de centre ω . Former les équations des cercles de F passant par A ou par B .
- d.** Soit le point $K(+2; 0)$. Démontrer que la polaire de K par rapport à tout cercle de F passe par un point fixe P et calculer les coordonnées de P .

Partie B

On considère une suite (u_n) de terme général u_n , (n entier strictement positif) vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = -\frac{15}{u_n} + 8$$

Démontrer que si $u_1 \neq 3$ on a, pour tout n , $u_n \neq 3$, et qu'il existe un nombre rationnel α indépendant de n tel que

$$\frac{u_{n+1} - 5}{u_{n+1} - 3} = \alpha \frac{u_n - 5}{u_n - 3}$$

Soit $t_n = \frac{u_n - 5}{u_n - 3}$; calculer t_n , puis u_n en fonction de n , du nombre α trouvé et de t_1 .
Quelle est la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$?