

## ❧ Baccalauréat C Toulouse juin 1971 ❧

### EXERCICE 1

Déterminer tous les couples  $(a; b)$  d'entiers naturels ( $a \geq b$ ) tels que  $a^2 - b^2 = 1620$  et que le plus grand commun diviseur de  $a$  et de  $b$  soit 6.

### EXERCICE 2

1. Déterminer les nombres complexes  $z$  tels que  $z^2 = -2i$ .  
(On donnera les formes trigonométrique et algébrique des nombres trouvés.)
2. Trouver les nombres complexes, racines de l'équation du second degré,

$$x^2 - 2(3 + 2i)x + 5 + 14i = 0.$$

3. Soit l'équation

$$x^3 + ax^2 + bx + 15 + 42i = 0,$$

où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels. Les déterminer pour que cette équation admette le nombre complexe  $2 + 3i$  pour solution. (On ne demande pas les autres solutions.)

### PROBLÈME

#### Partie A

Un plan  $(\mathcal{P})$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ;  $x'Ox$  est l'axe des abscisses et  $y'Oy$  celui des ordonnées.

1. Soit  $E$  l'ensemble des points de  $x'Ox$  d'abscisse différente de zéro. On considère l'application  $T$  de  $E$  dans  $x'Ox$  définie par la relation

$$x' = -\frac{15}{x} + 8$$

$x$  étant l'abscisse d'un point  $M$  de  $E$  et  $x'$  l'abscisse du point associé  $M'$  tel que  $T(M) = M'$ .

Est-ce que  $T$  est bijective? Démontrer qu'il existe deux points  $A$  et  $B$  de  $E$  tels que  $T(A) = A$  et  $T(B) = B$ . (On choisit l'abscisse de  $A$  inférieure à celle de  $B$ .)

2. Soit  $(\mathcal{P}^*) = (\mathcal{P}) - \{O\}$ . On considère l'application  $\mathcal{F}$  de  $(\mathcal{P}^*)$  dans  $(\mathcal{P})$ , produit de l'inversion  $\mathcal{J}$  de pôle  $O$  et de puissance  $k$  par la translation  $\mathcal{T}$  de vecteur  $\delta \vec{i}$ ; donc  $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{J}$ .

Déterminer  $k$  et  $\delta$  pour que  $T$  soit la restriction de  $\mathcal{F}$  à  $E$ , c'est-à-dire que, pour tout point  $M$  de  $E$ ,  $\mathcal{F}(M) = T(M)$ . Dans la suite  $k$  et  $\delta$  sont les nombres ainsi déterminés.

Calculer les coordonnées  $x'$  et  $y'$  du point  $M'$  transformé par  $\mathcal{F}$  d'un point  $M$  de coordonnées  $x$  et  $y$ .

3. a. Soit  $(\Gamma)$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{15}$ .  
On appelle cercle  $(C)$  tout cercle, autre que  $(\Gamma)$ , invariant dans  $\mathcal{J}$ . Démontrer que tout cercle  $(C)$  coupe  $(\Gamma)$  en deux points diamétralement opposés.

- b.** Démontrer que l'ensemble  $F$  des cercles  $(C)$  passant par le point  $U(+1; +2)$  est un faisceau à points de base, et calculer les coordonnées du deuxième point de base  $V$ .  
Trouver géométriquement le transformé  $F'$  de l'ensemble  $F$  par la transformation  $\mathcal{F}$ .
- c.** Vérifier que le vecteur  $\vec{u}(-2; +1)$  est un vecteur directeur de la médiatrice  $(\Delta)$  du segment  $[UV]$ .  
Soit  $I$  le milieu du segment  $[UV]$  et  $\omega$  le point de  $(\Delta)$  défini par  $\vec{I\omega} = t\vec{u}$ ,  $t$  étant un réel. Calculer les coordonnées de  $\omega$  et former l'équation du cercle  $(C)$  de  $F$  de centre  $\omega$ . Former les équations des cercles de  $F$  passant par  $A$  ou par  $B$ .
- d.** Soit le point  $K(+2; 0)$ . Démontrer que la polaire de  $K$  par rapport à tout cercle de  $F$  passe par un point fixe  $P$  et calculer les coordonnées de  $P$ .

### Partie B

On considère une suite  $(u_n)$  de terme général  $u_n$ , ( $n$  entier strictement positif) vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = -\frac{15}{u_n} + 8$$

Démontrer que si  $u_1 \neq 3$  on a, pour tout  $n$ ,  $u_n \neq 3$ , et qu'il existe un nombre rationnel  $\alpha$  indépendant de  $n$  tel que

$$\frac{u_{n+1} - 5}{u_{n+1} - 3} = \alpha \frac{u_n - 5}{u_n - 3}$$

Soit  $t_n = \frac{u_n - 5}{u_n - 3}$ ; calculer  $t_n$ , puis  $u_n$  en fonction de  $n$ , du nombre  $\alpha$  trouvé et de  $t_1$ .  
Quelle est la limite de  $u_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ ?