Durée : 4 heures

∽ Baccalauréat C Nantes septembre 1971 ∾

EXERCICE 1

Le symbole Log u désigne le logarithme népérien de u.
On considère la fonction f de la variable réelle x définie par

$$f(x) = \frac{x}{g(x)} \quad \text{et} \quad g(x) = \text{Log}(\sin x);$$

on impose à x d'appartenir à $[0\ ;\ 2\pi]$.

1. Déterminer l'ensemble de définition, (D), de f.
2. Calculer la dérivée f' de f et la dérivée h' de h définie par $h(x) = f'(x).g^2(x)$.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout x de (D).

EXERCICE 2

1. p est un paramètre réel ; discuter graphiquement le nombre de racines strictement positives de l'équation

$$x^3 + x - p = 0$$

où où x est l'inconnue.

2. q est un paramètre réel ; discuter graphiquement le nombre de racines strictement positives de l'équation

$$\frac{x^4+1}{x^3} - q = 0$$

où x est l'inconnue.

3. m est un paramètre réel ; on envisage le système de deux équations à deux inconnues (x et y) :

$$\left\{\begin{array}{lcl}(x+y)\text{Log}\,x &=& m\text{Log}\,y,\\(x+y)\text{Log}\,y &=& 9m\text{Log}\,x.\end{array}\right.$$

Vérifier qu'il admet dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la solution $S = (1\ ;\ 1)$ indépendante de m.
Discuter, suivant les valeurs de m, le nombre des solutions différentes de S que ce système admet dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$; on ne demande pas de calculer ces solutions lorsque m est quelconque.
Déterminer, si elles existent, les solutions pour

$$m = \frac{10}{3}, \quad m = \frac{2}{3}, \quad m = -1.$$

PROBLÈME

Le plan est rapporté à un repère orthonormé, O est l'origine, $x'Ox$ et $y'Oy$ sont les axes. Le nombre a est un réel constant strictement positif. Le point A est le point $(0\ ;\ a)$.
M et M' sont deux points quelconques, symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
On considère l'inversion $\mathscr{J}$, dont le pôle est A et dont la puissance est le réel constant non nul k.

1. **a.** Démontrer que, lorsque M varie, les cercles (AMM') engendrent un faisceau, que l'on précisera.

   Le point M étant fixé, $\mathcal{J}$ transforme M et M' respectivement en P et P' : quel est le transformé du cercle (AMM') ?

   En déduire que, lorsque M varie, les droites (PP') passent par un point fixe B, dont on indiquera les coordonnées en fonction de a et de k.

   b. M étant fixé, quel est le transformé du cercle (APP') ?

   Démontrer que ce cercle admet en A une tangente fixe.

   Conclure que, lorsque M varie, les cercles (APP') engendrent un faisceau, que l'on précisera.

   c. Les cercles (AMM') et (APP') peuvent-ils être orthogonaux ?

2. Démontrer que P et P' s'échangent dans une inversion $\mathcal{J}_1$ dont le pôle est fixe et dont la puissance est constante.

3. Soit $\mathcal{T}$ la transformation définie par $\mathcal{T} = \mathcal{J}_1 \circ \mathcal{J}$ ($\mathcal{J}$ suivie de $\mathcal{J}_1$), on ne demande pas une étude complète ; on répondra seulement aux questions suivantes.

   a. Quel est le transformé de M, que l'on note $\mathcal{T}(M)$?

   $\mathcal{T}(M)$ est-elle une transformation involutive ?

   b. Calculer les coordonnées de $\mathcal{T}(M)$ en fonction de a, k, u et v, où u et v sont les coordonnées de M.

   $\mathcal{T}(M)$ admet-elle des points doubles ? Examiner le cas particulier k = a2 ?

   c. M étant fixé, quel est le transformé du cercle (MM'P) dans :1 j dans :Il j dans ? Quelle est la puissance de 0 pour ce cercle ? Démontrer que, lorsque M varie, ces cercles engendrent un faisceau, dont on discutera la nature. Si l'on appelle I et J les points remarquables de ce faisceau (points limites, ou points de base), quels sont (I) et (J) ?