Durée : 4 heures

Baccalauréat C Orléans–Tours juin 1972

EXERCICE 1

On considère l'ensemble, E, des entiers relatifs x qui vérifient simultanément

$$\left\{\begin{array}{lcll} x & \equiv & 2 & \pmod 3,\\ x & \equiv & 2 & \pmod 5,\\ x & \equiv & 2 & \pmod 7,\\ x & \equiv & 2 & \pmod 9.\end{array}\right.$$

Indiquer la forme générale des éléments de E et déterminer les éléments de E qui sont compris entre (-1000) et (-500).
Quel est le plus grand commun diviseur (P.G.C.D.) de deux éléments consécutifs de E ?

EXERCICE 2

Le plan est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. Déterminer la nature de la courbe (C), ensemble des points M, de coordonnées $(x~;~y)$ tels que

$$3x^2+4y^2+6x-9=0.$$

   Préciser les éléments caractéristiques de cette courbe (éléments de symétrie, foyers, directrices), la représenter dans le repère $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.
2. Au point M de (C), de coordonnées $(x~;~y)$, on associe le nombre complexe $z=x+\text{i}y$, affixe de M.
   Calculer le module de z, en fonction uniquement
   a. de l'abscisse, x, de z,
   b. d'un représentant, θ, de l'argument de z.
   Soit M' et M'' les points de (C) ayant pour affixes z' et z'' d'arguments représentés respectivement par θ et $\theta+\pi$ $(-\pi<\theta\leqslant\pi)$.
   Calculer la longueur du segment $\left[M'M''\right]$, c'est-à-dire la distance des points M' et M'', en fonction de θ.

PROBLÈME

On rappelle que l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, noté F, muni

– d'une loi de composition interne (addition des fonctions numériques) :

$$(\forall f\in F)(\forall g\in F)(\forall x\in\mathbb{R})\quad[(f+g)(x)=f(x)+g(x));$$

– d'une loi de composition externe (multiplication par un réel) :

$$(\forall f\in F)(\forall\lambda\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})\quad[(\lambda f)(x)=\lambda f(x)),$$

est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

On désigne par E l'ensemble des applications φ de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définies par

$$\varphi(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}, \quad a \text{ et } b \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

Un élément de E est donc déterminé par la donnée d'un couple $(a~;~b)$ de réels. On note φ_1 l'application correspondant au couple $(1~;~0)$ et φ_2 celle correspondant au couple $(0~;~1)$.

1. **a.** Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F et que $\left(\varphi_1~;~\varphi_2\right)$ est une base de E.

b. Démontrer que la partie, A, de E formée des fonctions φ monotones (au sens large) sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E, dont on indiquera une base.

Montrer que toute application φ non nulle, de A possède une application réciproque, φ^{-1}. Expliciter φ^{-1} et préciser son ensemble de définition.

2. À toute fonction φ de E, on fait correspondre $\ell(\varphi) = \varphi + \varphi'$ (φ' étant la fonction dérivée de φ.

a. Démontrer que ℓ est une application linéaire de E vers E. Quel est l'espace vectoriel $\ell(\mathrm{E})$, image de E, par cette application ? Donner la matrice L de ℓ dans la base $\left(\varphi_1~;~\varphi_2\right)$.

b. Déterminer le noyau de ℓ et l'ensemble des éléments de E invariants par ℓ.

3. **a.** On suppose a et b rationnels. Calculer une primitive de la fonction 'il définie par

$$\varphi(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x}$$

et déterminer les rationnels a et b tels que

$$\int_{-1}^{0} (ax+b)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -1.$$

b. Étudier la fonction φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_1(x) = x\mathrm{e}^{-x}$.

Tracer la courbe représentative (C) de φ_1 dans un système d'axes orthonormé $(x'\mathrm{O}x,~y'\mathrm{O}y)$.

Calculer la moyenne de φ_1 sur l'intervalle fermé [-1 ; 0].

Déterminer l'aire comprise entre la courbe (C), la droite $(x'x)$, la droite $(y'y)$ et la droite d'équation $x = h$, h étant une constante positive.

Quelle est la limite de cette aire quand h tend vers $+\infty$?