Baccalauréat C Aix-en-Provence septembre 1976

EXERCICE 1

1. Soit la fonction numérique f définie par

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$$

   Etudier les variations de la fonction et construire sa représentation graphique (C) dans un repère orthonormé.

2. Soit la fonction numérique F définie par

$$F(x) = \text{Log}\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

   Calculer $F'(x)$ et en déduire l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, (C) et les droites d'équations $x = 2$ et $x = \alpha$ (avec $\alpha > 2$).

EXERCICE 2

Résoudre dans le corps des complexes, l'équation :

$$z^2 - (3\text{i} - 1)z - 4 = 0.$$

On désigne par Z' et Z'' les racines de cette équation. On pose $Z' = x' + \text{i}y'$ avec $x' > 0$ et $Z'' = x'' + \text{i}y''$ avec $x'' < 0$.
Dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$de sens positif, on désigne par M' et M'' les imagés respectives des nombres Z' et Z''.
Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe S de centre O telle que $S(M') = M''$.

PROBLÈME

Soit E un plan vectoriel euclidien réel dont $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ est une base orthonormée.
On désigne par $\mathscr{E}$ un plan affine associé à E et rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
Soit f l'application affine de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{E}$ telle que :

- $f(\text{A}) = \text{A}_1$ avec $\text{A}(1~;~-2)$ et $\text{A}_1(2~;~4)$
- L'application linéaire φ associée à f a pour matrice dans la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soit $M(x~;~y)$ un point quelconque de $\mathscr{E}$, $M_1\left(x_1~;~y_1\right)$ son image par f ; et $M_2\left(x_2~;~y_2\right)$ l'image de M_1 par f.

1. Établir les relations

$$\left\{\begin{array}{l c l} x_1 &=& -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + 2 \\ y_1 &=& 3x - \frac{1}{2}y \end{array}\right.$$

2. **a.** Montrer que f est bijective.

b. Soit D une droite quelconque de $\mathscr{E}$; $f(D)$ la droite transformée de D par f. (D) et $f(D)$ peuvent-elles être parallèles ?

c. En déduire que pour tout point $M \in \mathscr{E}$ tel que $f(M) \neq M$, les points M, M_1, M_2 ne sont pas alignés.

d. Déterminer par son équation l'ensemble (C) des points $M(x\ ;\ y) \in \mathscr{E}$ tels que $\mathrm{K}(1\ ;\ 0)$, M, M_1 sont alignés. Donner la nature de la courbe (C) et la construire.

3. Calculer les coordonnées x' et y' du barycentre G des points M, M_1, M_2 affectés d'un même coefficient non nul (G est l'isobarycentre des points M, M_1, M_2).

Vérifier que G est indépendant de M et montrer que G est le seul point invariant par f.

En déduire que $f^3 = f \circ f \circ f$ est l'application identique de $\mathscr{E}$; c'est-à-dire : $f^3 = \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$.

Partie B

Soit $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications linéaires de E vers E. On pose :

$$\mathscr{J} = \left\{\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) / \varphi^3 = \varphi \circ \varphi \circ \varphi = \mathrm{I}_{\mathscr{E}}\right\}.$$

$\mathrm{I}_{\mathscr{E}}$ désignant l'application identique de E. On posera de même $\varphi^2 = \varphi \circ \varphi$.

1. **a.** Montrer que $\mathrm{I}_{\mathscr{E}} \in \mathscr{J}$.

b. Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ telle que $\varphi^2 = -\varphi - \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$. Montrer que $\varphi \in \mathscr{J}$. La réciproque est-elle vraie ?

c. Montrer que toute application de $\mathscr{J}$ est bijective.

2. On considère une application φ telle que $\varphi^2 = -\varphi - \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$.

a. Montrer que $(\varphi\ ;\ \mathrm{I}_{\mathscr{E}})$ est une partie libre de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

b. On pose $\theta = \alpha.\varphi + \beta \mathrm{I}_{\mathscr{E}}\ :\ (a\ ;\ b) \in \mathbb{R}^2$.

Montrer que $\theta^2 = \theta \circ \theta$ est une combinaison linéaire de φ et $\mathrm{I}_{\mathscr{E}}$. Calculer $\theta^3 = \theta \circ \theta \circ \theta$.

En déduire que θ appartient à $\mathscr{J}$ si et seulement si

$$\theta = \mathrm{I}_{\mathscr{E}} \quad \text{ou}\, \theta = \varphi \quad \text{ou}\ \theta = \varphi^2.$$

3. Soit φ un élément de $\mathscr{J}$ tel qu'il existe un vecteur non nul $\overrightarrow{\mathrm{V}} \in \mathrm{E}$ tel que $\varphi\left(\overrightarrow{\mathrm{V}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{V}}$. Soit $\overrightarrow{\mathrm{V}'}$ non colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{V}}$, $\overrightarrow{\mathrm{V}'} \in \mathrm{E}$.

a. Justifier que la matrice de φ dans la base $\left(\overrightarrow{\mathrm{V}}, \overrightarrow{\mathrm{V}'}\right)$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

b. Calculer la matrice de φ^3 dans cette base, en déduire que $\varphi = \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$.

4. Application : Soit f une application affine quelconque avec $f \neq \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$ et vérifiant $f^3 = \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$. Soit φ l'application linéaire associée à f.

a. Montrer que $\varphi \in \mathscr{J}$ et $\varphi \neq \mathrm{I}_{\mathscr{E}}$.

b. Montrer que Ω (isobarycentre de M, $f(M)$, $f^2(M)$ est un point invariant par f,

c. Montrer que Ω est le seul point invariant par f.