

☞ Baccalauréat C Caen juin 1976 ☞

EXERCICE 1

On considère l'équation :

$$(1) \quad 324x - 245y = 7 \quad (x; y) \in \mathbb{Z}^2$$

1. Montrer que pour toute solution $(x; y)$, x est multiple de 7.
2. Déterminer une solution $(x_0; y_0)$ et en déduire toutes les solutions.
3. Soit δ le PGCD des éléments d'un couple $(x; y)$ solution de (1). Quelles sont les valeurs possibles de δ ? Déterminer les solutions de (1) telles que x et y soient premiers entre eux.

EXERCICE 2

Le plan euclidien orienté P est rapporté à un repère orthonormé. Soit $z = x + iy$ l'affixe d'un point $M(x; y)$ de ce plan.

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan P tels que :

$$|(1 - i)z + 2i| = 2$$

2. Étudier la transformation de P qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe

$$z' = (1 - i)z + 2ii.$$

3. En utilisant la transformation précédente, retrouver le résultat du 1.

PROBLÈME

Soit P un plan affine euclidien et (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé de ce plan.

Partie A

Construire la courbe Γ d'équation :

$$4y^2 - x^2 = 4$$

Partie B

On donne les points :

$$A(0; 1) \quad B(-2; 1) \quad A'(-1; 3) \quad B'(-2; 2)$$

1. Montrer qu'il existe une bijection affine unique g telle que :

$$g(O) = B, \quad g(A) = A', \quad g(B) = B'$$

Soit C le symétrique de B par rapport à A . Définir sans calcul le point $C' = g(C)$ et les images par g des droites OB et OC .

2. Déterminer les coordonnées de A' dans le repère $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. En déduire un système de coefficients réels $(\alpha; \beta; \gamma)$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$ et que A' soit barycentre des points (O, A, B) affectés des coefficients respectifs $(\alpha; \beta; \gamma)$.
3. Donner la matrice, dans la base (\vec{i}, \vec{j}) , de l'endomorphisme f associé à g et l'expression analytique de g . Donner les coordonnées dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du barycentre des points B, A', B' affectés respectivement des coefficients $(\alpha; \beta; \gamma)$.
4. Montrer que l'équation cartésienne de la courbe Γ' image de Γ par g est :

$$y = \frac{3}{2}x + 4 + \frac{1}{2(x+2)}.$$

Construire cette courbe, montrer que $B'C'$ est tangente à Γ' et préciser le point de contact.

Partie C

Soit D la droite d'équation $x = -2$ et D' la droite d'équation $y = \frac{3}{2}x + 4$.

1. Définir analytiquement la symétrie S par rapport à D suivant D' .
2. Montrer que l'application $g^{-1} \circ S \circ g$ est une involution affine. Trouver $g^{-1} \circ S \circ g(O)$, $g^{-1} \circ S \circ g(B)$, $g^{-1} \circ S \circ g(C)$ et en déduire la nature de $g^{-1} \circ S \circ g$.

Partie D

On considère la partie de P limitée par la courbe Γ' , la droite D' , les droites d'équation $x = -3$ et $x = m$, m étant un paramètre réel inférieur strictement à -2 .

1. Calculer l'aire arithmétique $\Sigma(m)$ de ce domaine.
2. Étudier la fonction $\Sigma:]-\infty; -2[\rightarrow \mathbb{R}$
 $m \mapsto \Sigma(m)$
 et construire sa courbe représentative.

3. Soit h l'application $[-3; -2[\rightarrow \mathbb{R}_+$
 $x \mapsto -\frac{1}{2}\text{Log}(-x-2)$

Montrer que c'est une bijection et définir la bijection réciproque h^{-1} . En tracer la courbe représentative sur le même dessin que la courbe de Σ .

4. Définir la fonction $h^{-1} \circ \Sigma$.