Baccalauréat C Dijon septembre 1976

EXERCICE 1

1. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Soit P un plan affine rapporté à un repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$. On note J l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ des n premiers entiers naturels non nuls. On appelle $M_{(m\ ;\ p)}$ le point de coordonnées $(m\ ;\ p)$ dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, $(m\ ;\ p)$ appartenant à $J\times J$. On affecte chaque point $M_{(m\ ;\ p)}$ du coefficient m ; on note $\left(M_{(m\ ;\ p)},\ m\right)$ le point pondéré obtenu.

   a. Déterminer, dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$les coordonnées du barycentre G_1 du système $\left\{\left(M_{(1\ ;\ p)},\ 1\right) ; p\in J\right\}$, obtenu pour $m=1$.

   Déterminer, dans le repère $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, les coordonnées du barycentre G_{m_0} du système $\left\{\left(M_{(1\ ;\ p)},\ 1\right) ; p\in J\right\}$, obtenu pour $m=m_0$.

   b. En déduire les coordonnées du barycentre G du système

$$\left\{\left(M_{(m\ ;\ p)},\ m\right);\quad (m\ ;\ p)\in J\times J\right\}.$$

   c. Quel est l'ensemble des valeurs de n pour lesquelles les coordonnées de G sont entières ?

EXERCICE 2

Soit P un plan affine euclidien, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.
À tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ on fait correspondre son affixe $z=x+\text{i}y$, où i est un nombre complexe tel que $\text{i}^2=-1$.
On appelle s la suite, application de $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels, dans $\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes, définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} & z_0 & = & 0\\ (\forall n\in\mathbb{N}) & z_{n+1} & = & \dfrac{1}{2}z_n+1\end{array}\right.$$

1. Montrer que z_n s'exprime comme somme des n premiers termes d'une suite géométrique. Calculer z_n en fonction de n.
2. Soit M_n l'image du nombre complexe z_n, $n\in\mathbb{N}$. Par quelle transformation affine simple passe-t-on de M_n à M_{n+1} ?
3. Soit A le point de coordonnées $\left(\dfrac{4}{5}\ ;\ \dfrac{2}{5}\right)$. Calculer en fonction de n la norme du vecteur $\overrightarrow{\text{A}M_n}$. Trouver la limite de cette norme quand n tend vers $+\infty$.
   Représenter les points A, M_0, M_1, M_2, M_3, M_4 dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{e_1},\ \overrightarrow{e_2}\right)$.

PROBLÈME

Partie A

Soient f et g les fonctions numériques de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \frac{\mathrm{e}^{t} + \mathrm{e}^{-t}}{2}, \qquad g(t) = \frac{\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{-t}}{2}$$

e étant la base des logarithmes népériens.

1. Étudier les variations de la fonction g.
Étudier les variations de la fonction f.
Tracer les courbes représentatives dans un même repère orthonormé.

2. Démontrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer g^{-1}, fonction réciproque de g.

3. Établir les identités suivantes :

$$(\forall t \in \mathbb{R}), \quad f^2(t) - g^2(t) = 1 \quad \text{où} \quad f^2(t) = f(t) \times f(t)$$

$$(\forall t \in \mathbb{R})(\forall t' \in \mathbb{R}), \quad f(t) \times f(t') + g(t) \times g(t') = f(t+t')$$

$$(\forall t \in R)(\forall t' \in \mathbb{R}), \quad g(t) \times f(t') + f(t) \times g(t') = g(t+t')$$

Partie B

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension 2 et $\mathscr{B} = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$ une base orthonormée de E. On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans lui-même (endomorphismes de E). On note $GL(E)$ l'ensemble des applications linéaires bijectives de E sur lui-même (transformations linéaires de E ou automorphismes de E).
On appelle ψ l'application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\left(\forall \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) \in E \times E\right) \quad \left(\psi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right) = 4xx' - yy'\right)$$

$(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$ étant les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la base $\mathscr{B}$.
On définit l'application N de E dans $\mathbb{R}$ par :

$$\left(\forall \overrightarrow{u} \in E\right) \quad \left(N\left(\overrightarrow{u}\right) = \psi\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}\right)\right).$$

On note $\varphi_{a,\,b}$ l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\begin{pmatrix} a & \dfrac{b}{2} \\ 2b & a \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que ψ est une application bilinéaire symétrique. Quel est l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{u}$ tels que $N\left(\overrightarrow{u}\right) = 0$?
ψ est-il un produit scalaire sur E ?

2. On dit que $\varphi_{a,\,b}$ conserve N si et seulement si

$$\left(\forall \overrightarrow{u} \in E\right) \quad \left(N\left(\varphi_{a,\,b}\left(\overrightarrow{u}\right)\right) = N\left(\overrightarrow{u}\right)\right).$$

Démontrer que $\varphi_{a,\,b}$ conserve N si et seulement si $a^2 - b^2 = 1$.
Démontrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ des applications linéaires $\varphi_{a,\,b}$ qui conserve N est un groupe commutatif pour la composition des applications (notée $\circ$).

3. On note Φ_t l'application $\varphi_{f(t),\ g(t)}$, f et g étant les fonctions étudiées dans la partie A.

Démontrer que Φ_t est élément de $\mathcal{F}$ et que l'application m de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}$ définie par

$$m:\ t \longmapsto \Phi_t$$

est un homomorphisme injectif du groupe $(\mathbb{R},\ +)$ dans le groupe $(\mathcal{F},\ \circ)$.

Démontrer que l'ensemble $m(\mathbb{R})$ est formé des éléments $\varphi_{a,\ b}$ de $\mathcal{F}$ pour lesquels a est strictement positif.

Partie C

Soit P le plan affine associé à l'espace vectoriel E, rapporté au repère orthonormé $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Soit A le point de coordonnées (1 ; 1) dans ce repère.
On considère le point mobile M du plan P dont la position est définie à l'instantt par :

$$\overrightarrow{\text{O}M(t)} = \Phi_t\left(\overrightarrow{\text{OA}}\right).$$

1. Exprimer à l'instant t les coordonnées de M dans le repère $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$.

2. Démontrer que le support de la trajectoire de M est une hyperbole dont on précisera les asymptotes, les foyers, les sommets.

Préciser la trajectoire de M quand t décrit $\mathbb{R}$.

3. Calculer en fonction de t les coordonnées du vecteur vitesse $\overrightarrow{\text{V}}$ et du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}$. De l'étude du produit scalaire $\overrightarrow{\text{V}} \cdot \overrightarrow{\Gamma}$, déduire les valeurs de t pour lesquelles le mouvement est accéléré, retardé.