

❧ Baccalauréat C Montpellier septembre 1976 ❧

EXERCICE 1

Résoudre successivement dans l'ensemble $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ les équations :

$$2x = 1$$

$$x^2 + 4x + 3 = 0$$

$$x^4 + 4x^2 + 3 = 0$$

EXERCICE 2

On considère, dans le plan complexe, un point M , d'affixe u et les points M' et M'' qui ont respectivement pour affixes les racines Z' et Z'' de l'équation :

$$Z^2 - 2(u+1)Z + 2u^2 + 2u + 1 = 0 \quad \text{où } Z \text{ est l'inconnue.}$$

1. Résoudre cette équation dans l'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes.
2. Trouver l'ensemble des points M tels que la distance de M' à M'' soit égale à 2. Quel est alors l'ensemble des points M' et M'' ?

PROBLÈME

Les parties A et B sont indépendantes.

1. Soit E un espace vectoriel de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère l'application linéaire φ de E dans E , définie par :

$$\begin{cases} \varphi(\vec{i}) = \vec{i} \\ \varphi(\vec{j}) = -\vec{i} + 2\vec{k} \\ \varphi(\vec{k}) = \vec{k} \end{cases}$$

- a. Déterminer le noyau de φ , son image et l'ensemble des vecteurs invariants.
 - b. Préciser la nature de φ .
2. Soit \mathcal{E} un espace affine associé à E , de repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On appelle f l'application affine de \mathcal{E} dans \mathcal{E} , associée à l'application linéaire φ et telle que $f(O) = O$.

- a. Montrer que tout point M de \mathcal{E} de coordonnées $(x; y; z)$ a pour image par f le point M' de coordonnées :

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 0 \\ z' = 2y + z \end{cases}$$

Définir géométriquement f .

- b. Soit P le plan de repère cartésien (O, \vec{i}, \vec{j}) . On considère la droite (D) d'équations : $x = 2$ et $z = 0$ et la droite (Δ) d'équations : $x - 2y - 2 = 0$ et $z = 0$. (Ces droites sont donc contenues dans P).

Déterminer les images de (D) et (Δ) par l'application f .

Partie B

1. On suppose maintenant E euclidien et le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé.

Construire, par rapport au repère (O, \vec{i}, \vec{j}) du plan P , la courbe H d'équation :

$$y = \frac{x^2 - 4x + 5}{2x - 4}.$$

2. Déterminer la courbe H' image de H par l'application f étudiée dans la partie A - 2.

Préciser sa nature et ses éléments remarquables.

3. On considère un point mobile M dont les coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont définies, à l'instant t , par les relations :

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1 + \sin t}{\cos t} \\ y = \frac{1}{\cos t} \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

a. Montrer que la trajectoire de M est une partie de H .

b. Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de M à l'instant t .

c. Le point M' , image de M par f , est aussi un point mobile.

Déterminer les coordonnées du vecteur vitesse de M' à l'instant t . La vitesse de M' peut-elle être, à un instant t , double de celle de M ?

Montrer que le vecteur vitesse de M' est le transformé par φ du vecteur vitesse de M .