Baccalauréat C Aix–Marseille juin 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Établir que : quel que soit $(a, b, q) \in \mathbb{Z}^3$, $a \wedge b = b \wedge a - bq$.
   La notation $a \wedge b$ désigne le PGCD des entiers relatifs a et b.
2. Montrer que : quel que soit $n \in \mathbb{Z}$,

$$5n^3 - n \wedge n + 2 = n + (2 \wedge 38).$$

3. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n+2$ divise $5n^3 - n$.
4. Quelles sont les valeurs de possibles de $5n^3 - n \wedge n + 2$?
   En déduire l'ensemble des valeurs de $n \in \mathbb{Z}$ telles que

$$5n^3 - n \wedge n + 2 = 19.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

1. Soit la fonction Q_{n-2} de la variable réelle t, dépendant de n, entier naturel supérieur à 2, donnée par

$$Q_{n-2}(t) = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^{n-2}t^{n-2}.$$

Montrer que, quel que soit $t \neq -1$,

$$Q_{n-2}(t) = \frac{1 - (-1)^{n-1}t^{n-1}}{1+t}.$$

En déduire que

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 + \dots + (-1)^{n-2}t^{n-2} + (-1)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{1+t}.$$

En intégrant les deux membres de cette dernière relation sur le segment $[0\,;\ x]$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, établir la relation

$$\ln(1+x) = P_{n-1}(x) + (-1)^{n-1} + \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t, \quad (I)$$

en posant : $P_{n-1}(x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-2}\dfrac{x^{n-1}}{n-1}$.

2. **a.** Soit la fonction numérique φ définie sur $]0\,;\ 1]$ par

$$\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Montrer que l'on peut prolonger cette fonction φ par continuité pour $x = 0$.

Soit f le prolongement ainsi obtenu sur $[0\,;\,1]$, donné par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} f(x) & = & \dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x \in]0\,;\ 1] \text{ et} \\ f(0) & = & 1. \end{array}\right.$$

b. De l'étude des variations de la fonction θ, définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$\theta(x) = x - \ln(1+x),$$

déduire que :

$$\text{quel que soit } x \in]0\,;\,+\infty[,\ x - \ln(1+x) > 0.$$

En utilisant cette dernière relation, montrer que :

$$\text{quel que soit } x \in [0\,;\,1],\ f(x) \leqslant 1.$$

c. Cette fonction f étant continue sur $[0;\,1]$, on rappelle que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existe. Soit L sa valeur.

n étant un entier naturel non nul, montrer que :

$$0 \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n}.$$

En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Montrer que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = L$.

3. **a.** Montrer que,

$$\text{quel que soit } x \in [0\,;\,1],\quad \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x t^{n-1}\,\mathrm{d}t.$$

En déduire que, quel que soit $x \in [0\,;\,1]$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} \leqslant \frac{1}{n}$.

En utilisant la relation I de la première question montrer que :

quel que soit $x \in]0\,;\,1]$, $\displaystyle -\frac{1}{nx} \leqslant f(x) - \frac{P_{n-1}(x)}{x} \leqslant \frac{1}{nx}$.

Par intégration sur le segment $\left[\frac{1}{n}\,;\,1\right]$, établir la relation :

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant S_n(1) \leqslant \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} + S_n\left(\frac{1}{n}\right)$$

en posant

$$S_n(x) = x - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{x^{n-1}}{(n-1)^2},\quad (n \geq 2).$$

b. Démontrer que, quels que soient $p \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in [0\,;\,1]$:

$$\frac{x^p}{p^2} \geqslant \frac{x^{p+1}}{(p+1)^2}.$$

En utilisant des égalités de la forme :

$$S_2(x) = x \quad ; \quad S_3(x) = \left(x - \frac{x^2}{2^2}\right) \quad ; \quad S_4(x) = \left(x - \frac{x^2}{2^2}\right) + \frac{x^3}{3^2} \quad ; \quad \ldots$$

montrer que, quels que soient $n \geqslant 2$ et $x \in [0\,;\,1]$: $0 \leqslant S_n(x)$.

En utilisant des égalités de la forme :

$$x - S_3(x) = \frac{x^2}{2^2} \quad ; x - \quad S_4(x) = \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}\right) \quad ; \quad x - S_5(x) = \left(\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^3}{3^2}\right) + \frac{x^4}{4^2} \quad ; \quad \ldots$$

montrer que, quels que soient $n \geqslant 2$ et $x \in [0\ ;\ 1]$: $S_n(x) \leqslant x$; et en définitive que $0 \leqslant S_n(x) \leqslant x$.

Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n\left(\frac{1}{n}\right)$.

c. Déduire des résultats 3. a. et 3. b. précédents que :

$$\lim_{n \to +\infty} S_n(1) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = L.$$

4. En regroupant convenablement les termes de la somme :

$$S_n(1) = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots + (-1)^{n-2}\frac{1}{(n-1)^2},$$

et en raisonnant comme au 3. b. montrer que,
quel que soit $n \geqslant 5$,

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} \leqslant S_n(1) \leqslant 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}.$$

On admettra alors le théorème suivant :

Théorème : Soit une suite convergente (u_n). S'il existe deux réels a et b, $(a \leqslant b)$ et un entier naturel n_0 tel que,
quel que soit $n > n_0$, $a \leqslant u_n \leqslant b$, alors $a \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant b$.

En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.