Baccalauréat C Besançon [1] septembre 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Trouver deux constantes a et b telles que l'on ait :

$$\begin{array}{llcl}\forall k \in \mathbb{Z} & 9k+4 & = & a(2k-1)+k+8\\ \text{et} & 2k-1 & = & b(k+8)-17.\end{array}$$

2. En déduire que :
   a. Si $k = 9 (\text{mod } 17)$ alors $\text{pgcd}(9k+4,\ 2k-1) = 17$,
   b. Si $k \neq 9 (\text{mod } 17)$ alors $\text{pgcd}(9k+4,\ 2k_1) = 1$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

1. x étant un réel supérieur à e^2, calculer

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\text{d}t, \quad \int_{\text{e}}^x \frac{1}{t\,\text{Log}\,t}\,\text{d}t, \quad \int_{\text{e}^2}^x \frac{1}{t\,\text{Log}\,t\,\text{Log}(\text{Log}\,t)}\,\text{d}t.$$

   Étudier leur comportement quand x tend vers $+\infty$.

2. (t étant un réel strictement positif, et x un réel supérieur à e, on pose :

$$I_\alpha(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\text{d}t, \quad J_\alpha(x) = \int_{\text{e}}^x \frac{1}{t(\text{Log}\,t)^\alpha}\,\text{d}t.$$

   Pour quelles valeurs de α, $I_\alpha(x)$ admet-il une limite finie quand x tend vers $+\infty$?
   Qu'en est-il alors de $J_\alpha(x)$?

PROBLÈME **12 POINTS**

E désigne un espace vectoriel réel de dimension trois, et $\mathscr{L}(\text{E})$ l'ensemble des applications linéaires de E dans E.
On rappelle que $\mathscr{L}(\text{E})$, muni des deux opérations : addition et multiplication par un réel, est un espace vectoriel réel (l'application nulle est notée 0), On peut aussi munir $\mathscr{L}(\text{E})$ de la composition (au sens des applications) : on posera

$$f^2 = f \circ f.$$

I désigne l'application identique de E.
Soient a et c deux réels, $a \neq 0$, et P l'application de $f(\text{E})$ dans $f(\text{E})$:

$$f \longmapsto P(f) = f^2 + af + c\text{I}.$$

Partie A

1. P est-elle une application linéaire ?
2. Montrer que si le trinôme $x^2 + ax + c$ a une racine réelle, alors il existe au moins une application f de $\mathscr{L}(\text{E})$ telle que $P(f) = 0$.
3. Soit f un élément de $\mathscr{L}(\text{E})$ tel que $P(f) = 0$.
   Montrer que si $c \neq 0$, f est bijective et déterminer alors son inverse.
   Peut-on avoir $c = 0$ et f bijective ?

1. Dijon - Nancy - Reims - Strasbourg

Partie B

Dans cette partie on suppose $c = 0$; ker f et Im f désignent respectivement le noyau de f et l'image de E par f.
Soit $f \in \mathscr{L}(\text{E})$ telle que $P(f) = 0$.

1. En écrivant tout vecteur x de E sous la forme $x = x' + x''$ avec $x' = x + \dfrac{1}{a}f(x)$, vérifier que $x' \in \ker f$ et $x'' \in \mathrm{I}m\, f$.
   Montrer que E est somme directe de ker f et Im f.
2. Montrer que $\ker f = \ker f^2$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\, f^2$.
3. Montrer que Im f est stable par f et préciser la restriction de f à Im f.
4. Calculer f^n en fonction de f ($f^n = f \circ f^{n-1}$ par définition).

Partie C

Soit f un élément de $\mathscr{L}(\text{E})$ tel que $P(f) = 0$.

1. Montrer que si f est involutif, alors $|a| = |c + 1|$.
2. On se propose de vérifier, par un contre-exemple, que cette condition n'est pas suffisante pour que f soit involutif.
   E étant le plan vectoriel, soit f un endomorphisme de E différent de l'identité tel que $f^2 - 2f + \text{I} = 0$. Montrer qu'il existe un vecteur x de E tel que $f(x) \neq x$, et vérifier que $(x\,;\, f(x))$ est un système libre.
   En posant $u = f(x) - x$, montrer que $(u\,;\, x)$ est une base de E et expliciter la matrice de f dans cette base.
   Que peut-on conclure ?

N. B. les parties A, B et C peuvent être traitées de façon indépendantes