Baccalauréat C Bordeaux septembre 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

On considère le corps $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z} = \{\dot{0},\ \dot{1},\ \dot{2},\ \dot{3},\ \dot{4}\}$.

1. Dresser les tables d'addition et de multiplication,
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{2} + x = \dot{1}$, en l'inconnue x.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation $\dot{3}x = \dot{2}$, en l'inconnue x.
4. Résoudre dans $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^2$ le système $\left\{\begin{array}{l c l}\dot{2}x+\dot{3}y &=& \dot{2}\\ \dot{1}x+\dot{2}y &=& \dot{4}\end{array}\right.$ en les inconnues x et y
5. Résoudre dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ l'équation, en l'inconnue x, $\quad x^2 + \dot{2}x - \dot{3} = \dot{0}$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Un sac contient cinq jetons numérotés 1, 1, 2, 2, 3.
On extrait simultanément deux jetons et on désigne par X la somme des nombres inscrits sur les deux jetons. Tous les tirages sont équiprobables.

1. Quelle est la loi de probabilité de la variable aléatoire X ?
2. Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire X.
3. Calculer l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X.

PROBLÈME **12 POINTS**

Partie A

l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes est considéré comme un espace vectoriel euclidien sur $\mathbb{R}$. Soit $\mathscr{B} = (1,\ \mathrm{i})$ la base constituée des nombres complexes 1 et i. On dira que le nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y$ est le vecteur de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans la base $\mathscr{B}$.
Si $(x\ ;\ y)$ et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ sont deux vecteurs de cet espace vectoriel, leur produit scalaire sera $xx' + yy'$. Soit a un réel donné et f_a l'application linéaire de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ de matrice $m = \begin{pmatrix}2a & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$.
On pose $f(z) = Z = X + \mathrm{i}Y$ avec $z = z + \mathrm{i}y \quad (x,\ y,\ X,\ Y$ réels).

1. a. Quelles sont les coordonnées de Z dans la base $\mathscr{B}$?
   b. Exprimer Z en fonction de x et y puis en fonction de z et $\overline{z}$ où $\overline{z} = x - \mathrm{i}y$ désigne le nombre complexe conjugué de $z = x + \mathrm{i}y$.
   c. Quels sont les éléments de $\mathbb{C}$ invariants par f_a ? Vérifier que l'ensemble de ces éléments est dans tous les cas un sous-espace de $\mathbb{C}$.
   d. Pour quelle valeur du réel a, f_a est-il une rotation vectorielle ?
2. a. Montrer que, quel que soit $a \in \mathbb{R}$, f_a est une bijection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}$.
   Soit f_a^{-1} l'application réciproque de f_a. On pose $f_a^{-1}(z) = X' + \mathrm{i}Y' \quad (X',\ Y'$ réels).
   b. Déterminer dans la base $\mathscr{B}$, la matrice de f_a^{-1}.

c. Soit $z = x + \text{i}y$ un élément de $\mathbb{C}$. Exprimer $Z' = f_a^{-1}(z)$ en fonction de x et y puis en fonction de z et $\overline{z}$. Déterminer une relation entre Z, Z' et z. En déduire que $f_a + f_a^{-1} = 2a\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ où $\mathbf{1}_{\mathbb{C}}$ est l'application identique dans $\mathbb{C}$.

d. Si $a \neq 0$, déterminer le noyau et l'image de $f_a - f_0$.

Partie B

Soit P un plan affine euclidien associé au plan vectoriel $\mathbb{C}$ et rapporté à un repère orthonormé d'origine O et de base $\mathcal{B}$. On désigne par φ_a l'application affine de P dans P qui au point O associe le point A$(1~;~a)$, $a \in \mathbb{R}$ et dont l'application linéaire associée est f_a. L'image par φ_a d'un point M est alors le point $M' = \varphi_a(M)$.

1. **a.** Déterminer les coordonnés x' et y' du point M' en fonction des coordonnées x et y du point M.

b. Démontrer que si $a \neq 1$ alors l'application affine φ_a admet un point invariant unique Ω dont on déterminera les coordonnées.

Si $a = 1$, quel est l'ensemble des points invariants ?

c. Établir que φ_a est la composée d'une application affine de point invariant O et d'une translation,

d. Quelle est l'image par φ_a de la droite affine d'équation $x = 0$? de la droite affine d'équation $y = 2ax$?

2. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que φ_0 est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle. Quelle est l'image par φ_0 du cercle de centre O et de rayon 1 ?

Quelles sont les images par φ_0 des bissectrices des axes du repère.

3. On suppose $a = 1$.

a. Exprimer $y' - x'$ en fonction de $y - x$. En déduire qu'il existe une famille de droites de même direction globalement invariantes par φ_1.

b. On considère la fonction numérique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}.$$

Étudier la fonction f. Construire sa courbe représentative (C) dans le repère (O, $\mathcal{B}$).

Déterminer une équation de la courbe (C$'$) transformée de (C) par φ_1. Vérifier que cette équation peut s'écrire sous la forme $x = y - \dfrac{1}{y}$.

Construire (C$'$) sur la même figure que (C), (On pourra au préalable étudier et représenter la fonction $g : x \longmapsto y = x - \dfrac{1}{x}$. On déduira la courbe (C$'$) de la courbe représentative de la fonction g).

4. **a.** On suppose $a \neq 0$. Soit T_1 l'application affine de P dans P qui au point O associe le point A$(1~;~a)$ et dont l'application linéaire associée est

$$u = f_a + f_a^{-1}.$$

Démontrer que T_1 est une homothétie ou une translation,

b. On suppose encore $a \neq 0$. Soit T_2 l'application affine de P dans P, qui au point O associe le point A$(1~;~a)$ et qui admet $v = f_a - f_0$ pour application linéaire associée.

Démontrer que T_2 est la composée d'une homothétie, d'une projection sur une droite et d'une translation.