Baccalauréat C Caen septembre 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

L'espace affine euclidien E est rapporté au repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.

1. Soit M un point de E de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$.
   Déterminer les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ du point M', image de M dans la symétrie orthogonale s par rapport au plan P dont une équation est :
   $2x+3y-z-5=0$.
2. Soit f l'application affine de E dans E qui au point M associe le point M'' de coordonnées $\left(x''\ ;\ y''\ ;\ z''\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'' & = & \dfrac{3x-6y+2z+17}{7}\\ x'' & = & \dfrac{-6x-2y+3z+29}{7}\\ x'' & = & \dfrac{2x+3y+6z+5}{7}\end{array}\right.$$

   Démontrer que f est un antidéplacement de E, qui n'a pas de point invariant et que l'on peut décomposer f en le produit commutatif de l'application s par une applicatiun g que l'on déterminera.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^3+(3+2\mathrm{i})z^2+(3-\mathrm{i})z+2(1-5\mathrm{i})=0$$

après avoir montré qu'elle admet une solution réelle.

PROBLÈME **12 POINTS**

1. Soit la fonction numérique f définie par

$$f(x)=\mathrm{Log}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

   a. Donner l'ensemble $\mathcal{D}$ de définition de f.
   Démontrer que : $\forall x\in\mathcal{D},\quad f(x)+f(-x)=0,.$
   Démontrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et définir la fonction dérivée.
   Étudier les variations de f.

   b. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f dans un plan euclidien P, rapporté à un repère orthonormé $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
   Étudier les branches infinies, Préciser les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de sa tangente en 0. (On pourra étudier le sens de variation de la fonction φ :

$$\varphi:\left|\begin{array}{lcl}\mathcal{D} & \to & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \mathrm{Log}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-x\end{array}\right.$$

2. **a.** Démontrer que f est intégrable sur $[0\ ;\ a]$ où $a\in\mathbb{R}_+$.
   Calculer $I(a)=\displaystyle\int_0^a \mathrm{Log}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\,\mathrm{d}x$.

b. Soit u_n l'aire de la portion de plan ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que :

$$n \in \mathbb{N} \quad \left\{\begin{array}{lllll} 0 & \leqslant & x & \leqslant & n \\ 0 & \leqslant & y & \leqslant & f(x) \end{array}\right.$$

i. Démontrer que $u_n = n\text{Log}\left(n + \sqrt{n^2+1}\right) - \sqrt{n^2+1} - 1$.

ii. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Étudier son sens de variation. Cette suite est-elle convergente ?

3. a. Démontrer, sans calcul, que f admet une application réciproque notée g. Donner son ensemble de définition, montrer qu'elle y est dérivable et tracer sa courbe représentative $\left(\mathscr{C}'\right)$ dans le plan P.

b. Calculer $g(x)$ et $g'(x)$.

c. Dans toute la suite du problème, on pose $g' = h$.
Calculer $h'(x)$. Montrer que : $\forall x \in R, \quad h^2(x) - g^2(x) = 1$.

d. Soit $\left(\text{O}', \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un nouveau repère orthonormé de P.
Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M de coordonnées $(X\,;\,Y)$ où
$X = 3h(x)$, $Y = 2g(x)$ et x décrit $\mathbb{R}$. Construire $\mathscr{H}$.