Baccalauréat C Clermont-Ferrand septembre 1977

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Dans le corps des nombres complexes, calculer les racines cubiques de l'unité,
2. On note $\text{j} = -\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   À chaque nombre complexe $z = x + \text{i}y$ (x et y réels) on associe le point $M(z)$ de coordonnées $(x\ ;\ y)$ dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ d'axes $x'\text{O}x$ et $y'\text{O}y$.
   On désigne par A, B, C, D les images respectives dans ce plan des nombres
   $$-\text{j},\quad \frac{2}{\text{j}^2},\quad -\frac{2}{\text{j}^2},\quad \frac{4}{\text{j}^4}$$
   Démontrer que les quatre points A, B, C, D appartiennent à un même cercle.
   (On pourra former d'abord l'équation du cercle passant par A, B, C).

EXERCICE 2 **5 POINTS**

Dans le plan affine euclidien orienté P rapporté au repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A et B ayant respectivement pour coordonnées $(1\,;\,0)$ et $(-1\,;\,0)$ et la droite D passant par A et de vecteur directeur $\vec{\jmath}$.
Soit s la similitude directe dont le centre est B, dont l'angle est l'angle droit positif et dont le rapport est $\dfrac{1}{2}$.

1. Démontrer $\text{A}' = s(\text{A})$. Montrer que l'ensemble des images M' des points M de D par s est une droite D$'$ qui coupe D en I. Déterminer $\text{I}' = s(\text{I})$ et comparer λ et λ' tels que $\overrightarrow{\text{A}'M'} = \lambda'\overrightarrow{\text{A}'\text{I}'}$ et $\overrightarrow{\text{A}M} = \lambda\overrightarrow{\text{AI}}$.
   (Représenter graphiquement les points et les droites).
2. Soit M'' le barycentre des points M et M' respectivement affectés des coefficients 2 et -1.
   Démontrer que M'' est l'image de M dans une similitude directe s'' de centre B et que l'ensemble des points M'' images des points M de D est une droite D$''$ que l'on déterminera.
   (Pour résoudre cette question on pourra soit utiliser les nombres complexes, soit introduire A$''$ barycentre des points A et A$'$ respectivement affectés des coefficients 2 et -1 et montrer qu'il existe une similitude directe s' de centre B telle que
   $$s'(\text{A}) = M,\quad s'(\text{A}') = M'\quad e\text{et}\quad s'(\text{A}'') = M''$$

PROBLÈME **11 POINTS**

Partie A

Soit E l'ensemble des fonctions numériques f d'une variable réelle, définies sur $\mathbb{R}$ trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$, et telles que
$$(\forall x \in \mathbb{R})\quad f'''(x) - 3f''(x) + 3f'(x) - f(x) = 0.$$

1. Déterminer $k \in \mathbb{R}$ pour que la fonction qui à x associe e^{kx} soit élément de E.
2. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction numérique f d'une variable réelle soit élément de E est que la fonction g définie par

$$x \longmapsto g(x) = \frac{1}{e^x} f(x)$$

soit trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad g'''(x) = 0.$$

En déduire la forme générale des fonctions g, puis la forme générale des fonctions f de l'ensemble E.

Partie B

1. Soit E$'$ l'ensemble des fonctions réelles f qui, a, b et c désignant trois réels quelconques, associent au réel x le réel $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^x$.
Soit F l'ensemble des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$.
On sait que F muni de l'addition, et de la multiplication par un réel est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Démontrer que E$'$ est un sous-espace vectoriel de F, et que $\mathcal{B} = \left\{f_0,\ f_1,\ f_2\right\}$ est une base de E$'$, avec $f_0(x) = e^x$, $f_1(x) = xe^x$ et
$f_2(x) = x^2e^x$.
2. Étudier les variations de la fonction f_1, et tracer sa représentation graphique (C_1) dans un repère orthonormé. On prendre pour unité de longueur le centimètre.
Tracer, dans le même repère, la représentation graphique (C_0) de la fonction f_0.
3. Soit m un nombre réel positif. L'unité d'aire est le centimètre carré. Calculer l'aire $\mathcal{A}_m$ de la portion de plan limitée par les courbes (C_0), (C_1) et les droites d'équation $x = m$ et $x = 1$, c'est-à-dire déterminée par les inégalités

$$\left\{\begin{array}{ccccc} m & \leqslant & x & \leqslant & 1 \\ xe^x & \leqslant & y & \leqslant & e^x \end{array}\right.$$

Cette aire a-t-elle une limite lorsque m tend vers $+\infty$.
4. Soit D l'application qui à toute fonction f de E$'$ fait correspondre sa fonction dérivée.
Démontrer que D est un endomorphisme de E$'$. Déterminer les composantes de $D\left(f_0\right)$, $D\left(f_1\right)$, et $D\left(f_2\right)$ dans la base $\mathcal{B}$.
Démontrer que D est bijective et déterminer les composantes de $D^{-1}\left(f_0\right)$,
$D^{-1}\left(f_1\right)$, et $D^{-1}\left(f_2\right)$ dans la base $\mathcal{B}$, D^{-1} étant l'application réciproque de D.

Partie C

Soit α un nombre réel donné. À toute fonction f de E', on associe la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_\alpha(x) = f(x + \alpha)$$

1. Soit T_α l'application qui à f fait correspondre f_α. Montrer que $f_\alpha \in$ E$'$. T_α est-il un endomorphisme de E$'$?
Déterminer $T_\alpha\left(f_0\right)$, $T_\alpha\left(f_1\right)$ et $T_\alpha\left(f_2\right)$ dans la base $\mathcal{B}$.
2. Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des applications T_α lorsque α décrit $\mathbb{R}$. Démontrer que $\mathcal{T}$ muni de la loi $\circ$ de composition des applications, est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},\ +)$.