

∞ Baccalauréat C Rennes juin 1977 ∞

EXERCICE 1

3 POINTS

Un plan euclidien P est rapporté à un repère orthonormé direct.

Le complexe $z = x + iy$ est l'affixe du point M de coordonnées $(x; y)$ de ce plan. \bar{z} est le conjugué de z .

1. Déterminer la nature et les éléments de chacune des applications S_1 et S_2 de P dans P qui associent au point M d'affixe z respectivement les points $S_1(M)$ d'affixe $z_1 = i\bar{z}$ et $S_2(M)$ d'affixe $z_2 = 2iz + 5i$.
2. Déterminer l'ensemble E des points M du plan pour lesquels la distance des points $S_1(M)$ et $S_2(M)$ est égale à 1.
Préciser la nature et les éléments de symétrie de E .

EXERCICE 2

3 POINTS

Soit $K = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$.

1. a désignant un paramètre, élément de K , résoudre et discuter dans K l'équation en x : $x^2 = a$.
Montrer que l'équation $x^2 + 2px + q = \hat{0}$, où p et q sont deux éléments de K , admet deux racines distinctes ou confondues dans K si et seulement si $\delta = p^2 - q$ appartient à un sous-ensemble G de K .
2. Résoudre dans K les équations en x :
 - a. $x^4 - \hat{5}x + \hat{6} = \hat{0}$.
 - b. $x^3 + x - \hat{2} = \hat{0}$.
(On remarquera que cette dernière équation admet la solution $x = \hat{1}$).

PROBLÈME

14 POINTS

Partie A

\mathcal{P} est un plan affine rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) . Ox et Oy sont les droites affines passant par O et admettant pour vecteur directeur respectivement \vec{i} et \vec{j} .

a, b, c étant trois réels donnés, T est l'application affine de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui associe au point M de coordonnées $(x; y)$ le point $M' = T(M)$ de coordonnées $(x' = x, y' = ax + by + c)$.

1. Quelle est la nature de T dans les cas particuliers suivants :
 - a. $a = c = 0, b = 1$
 - b. $a = 0, b = 1, c \neq 0$
 - c. $b = 0$
2. Écrire la matrice de l'application linéaire associée à T dans la base (\vec{i}, \vec{i}) .
À quelle condition doivent satisfaire les réels a, b, c pour que T soit bijective ?
À quelle condition doivent satisfaire les réels a, b, c pour que T soit involutive ?
Quelle est la nature de la transformation T lorsque $b = -1$?
Déterminer l'ensemble I des points de \mathcal{P} invariants par T .
Discuter la nature de I suivant les paramètres (a, b, c) .

3. On suppose que les réels a, b, c sont tels que T est bijective et que l'ensemble I des points invariants est une droite. Soit M_0 un point de \mathcal{P} n'appartenant pas à I , $M'_0 = T(M_0)$, M un point de \mathcal{P} tel que la droite (M_0M) n'est pas parallèle à Oy et $M' = T(M)$.

Montrer que les trois droites I , (M_0M) et (M'_0M') sont concourantes ou parallèles.

En déduire une construction géométrique simple de $M' = T(M)$ pour tout point M du plan \mathcal{P} connaissant I , $M_0 \notin I$ et $M'_0 = T(M_0)$. (On supposera d'abord que la droite (M_0M) n'est pas parallèle à Oy).

4. Montrer que la transformation T est déterminée si l'on suppose qu'elle admet pour ensemble I des points invariants la droite d'équation $y = x + 1$ et que le point M_0 de coordonnées $(3; -2)$ a pour image M'_0 de coordonnées $(3; 1)$. (Pour ce faire, on déterminera les réels (a, b, c) correspondant à T). Vérifier que, dans ce cas, T est bijective.

Construire géométriquement l'image M'_1 du point M_1 de coordonnées $(-1; 2)$, puis l'image M''_0 du point M'_0 , enfin l'antécédent $T^{-1}(M_0)$ de M_0 .

(Le candidat fera le dessin sur la feuille de papier quadrillé qui lui est remise en supposant le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) orthonormé (l'origine étant sensiblement au centre de la feuille) et en prenant le centimètre comme unité. On expliquera brièvement ses constructions).

Soit M un point quelconque de \mathcal{P} , H le projeté de M sur I parallèlement à Oy .

Vérifier, par le calcul et sur le dessin, que $\overrightarrow{HM'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HM}$.

Partie B

On suppose les trois réels a, b, c donnés, b étant différent de 0.

t est la translation de \mathcal{P} de vecteur $-\vec{i}$ (opposé de \vec{i}). f est une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Γ est la courbe d'équation $y = f(x)$ dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Montrer que si f est telle que $T(\Gamma) = t(\Gamma)$, alors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = ax + bf(x) + c.$$

En déduire que, si f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} , sa dérivée f' satisfait à la condition :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f''(n) = b^n f''(0).$$

2. β désignant un réel positif ou nul, déterminer les fonctions g de \mathbb{R} dans \mathbb{R} deux fois dérivables et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g''(x) = g''(0)e^{\beta x}.$$

3. Supposant $b > 0$, on se propose de déterminer les applications f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} deux fois dérivables, satisfaisant à la condition :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+1) = ax + bf(x) + c$$

et telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = f''(0).b^x = f''(0)e^{x \ln b}$$

($\ln b$: logarithme népérien de b)

En utilisant les résultats de la question 2. précédente, montrer que les fonctions solutions sont telles que :

a. si $b = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + (c - \frac{a}{2})x + f(0)$

b. si $b \neq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{a}{1-b}x + \left[\frac{c}{1-b} - \frac{a}{(1-b)^2} \right] (1-b^x) + f(0)b^x$.

4. Soit $a = b = c = \frac{1}{2}$. Étudier dans ce cas les variations de la fonction f_1 solution du problème posé dans la question précédente, et telle que $f_1(0) = 1$. Tracer la courbe Γ_1 d'équation $y = f_1(x)$.

Partie C

a, b, c étant trois réels donnés tels que $b \neq 0$, $U = (u_n, n \in \mathbb{N})$ est la suite réelle de premier terme u_0 et telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = an + bu_n + c.$$

1. Montrer que s'il existe une courbe Γ définie dans la partie B (c'est-à-dire telle que $T(\Gamma) = t(\Gamma)$, T correspondant aux trois réels a, b, c) qui passe par le point de coordonnées $(0; u_0)$, alors tous les points de coordonnées $(n; u_n)$, $n \in \mathbb{N}$, appartiennent à Γ .
En déduire u_n en fonction de n lorsque $b = 1$, puis lorsque b est strictement positif et différent de 1.
Montrer que la formule donnant u_n en fonction de n pour $b \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$ s'étend au cas $b < 0$.
2. Comment faut-il choisir a, b, c et u_0 pour que la suite U soit :
 - a. constante
 - b. une suite arithmétique
 - c. une suite géométrique ?
3. Comment faut-il choisir a, b, c et u_0 pour que la suite U soit convergente ? Calculer alors sa limite.