

∞ Baccalauréat C Poitiers juin 1978 ∞

**EXERCICE 1**

**3 POINTS**

On considère l'équation :

$$(i - 1)z^2 - 2i(m + 1)z + (1 + i)(m^2 + 1) = 0$$

dans laquelle  $z$  est l'inconnue, et  $m$  un paramètre complexe.

1. Résoudre cette équation dans le corps des nombres complexes. On désignera par  $z_1$  et  $z_2$  les racines,  $z_2$  étant la racine qui devient réelle quand on substitue 0 à  $m$ .
2. Établir une relation indépendante de  $m$  liant les racines  $z_1$  et  $z_2$ . Soit  $M_1$  et  $M_2$  les images respectives de  $z_1$  et  $z_2$  dans un plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ . Montrer que  $M_2$  se déduit de  $M_1$  par une transformation que l'on caractérisera avec précision.

**EXERCICE 2**

**3 POINTS**

Si deux entiers naturels sont premiers entre eux, montrer qu'il en est de même de leur somme et de leur produit.

En déduire l'ensemble des paires  $\{a; b\}$  d'entiers naturels tels que

$$\begin{cases} a + b & = 96 \\ \text{PPCM}(a; b) & = 180 \end{cases}$$

**PROBLÈME**

**14 POINTS**

Dans une large mesure, les parties A et B sont indépendantes

Dans un plan affine euclidien P muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  on considère les points A, B, C de coordonnées respectives  $(a; 0)$ ,  $(0; b)$  et  $(0; -ab)$ , où  $a$  et  $b$  sont deux nombres réels non nuls.

**Partie A**

1. **a.** Montrer qu'il existe une application affine de P dans P et une seule, notée  $f_{a, b}$ , telle que  $f_{a, b}(A) = A$ ,  $f_{a, b}(B) = B$  et  $f_{a, b}(O) = C$ .
- b.** Quelle est l'image par  $f_{a, b}$  du barycentre  $M$  des points A et B affectés respectivement des coefficients  $\lambda$  et  $1 - \lambda$ ?  
En déduire que tout point de la droite (AB) est invariant par  $f_{a, b}$ .
- c.** Si  $M$  est un point de coordonnées  $(x; y)$ , et si  $M'$ , de coordonnées  $(x'; y')$ , est son image par  $f_{a, b}$ , montrer que

$$\begin{cases} x' & = x \\ y' & = bx + (a + 1)y - ab \end{cases}$$

2. Calculer les coordonnées de  $f_{a, b} \circ f_{a, b}(M)$ .  
Montrer qu'il existe une unique valeur  $a_1$  de  $a$  telle que  $f_{a, b}$  soit une symétrie pour tout  $b \neq 0$ ; caractériser cette symétrie.
3. On suppose dans cette question que  $a \in \mathbb{R} - \{0; -1\}$  et  $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ .  
**a.** Démontrer que l'application  $f_{a, b}$  est bijective.

- b. On se donne un point  $M_0$  de coordonnées  $(x_0 : y_0)$  n'appartenant pas à la droite (AB), et on pose  $M_1 = f_{a,b}(M_0)$ ? Montrer que  $M_1$  est différent de  $M_0$  et que la droite  $(M_0M_1)$  coupe la droite (AB) en un point  $H$  dont on calculera les coordonnées en fonction de  $x_0$ ,  $a$  et  $b$ .

Calculer le nombre réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{HM_1} = k\overrightarrow{HM_0}$  et montrer qu'il est indépendant de  $M_0$ .

- c. En partant du point  $M_0$  de la question précédente, on définit, par récurrence,  $M_n = f_{a,b}(M_{n-1})$  pour tout  $n \geq 1$ .

Calculer les coordonnées  $X_n$  et  $Y_n$  de  $\overrightarrow{HM_n}$ .

Quel est l'ensemble des valeurs de  $a$  pour lesquelles la suite de terme général  $u_n = Y_0 + Y_1 + \dots + Y_n$  a une limite finie quand  $n$  augmente indéfiniment?

Calculer alors cette limite en fonction de  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $a$  et  $b$ .

### Partie B

Dans cette seconde partie, on suppose  $a = -2$ .

Soit  $h_b$  l'application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$h_b(x) = -e^{2x} + 2e^x + \frac{b}{2}x.$$

On désigne par  $C_b$  la courbe représentative de  $h_b$  dans le plan  $P$  rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Démontrer que la courbe  $C'_b$  transformée de  $C_b$  par  $f_{-2,b}$  a pour équation

$$y = g_b(x) \quad \text{avec} \quad g_b(x) = e^{2x} - 2e^x + \frac{b}{2}x + 2b.$$

2. Étudier les variations de  $g_{-3}$ .
3. Dans ce cas particulier, représenter sur une même figure la droite (AB) et la courbe  $C'_{-3}$ ; on pourra prendre le centimètre pour unité de longueur.
4. Démontrer que la droite (AB) et la courbe  $C'_{-3}$  ont un seul point commun I dont on calculera les coordonnées  $(\alpha; \beta)$ . Montrer sans calculs, mais en utilisant les résultats obtenus à la question A 3. b., que  $\{I\} = C_{-3} \cap C'_{-3}$ .  
Calculer alors l'aire de l'ensemble des points  $M$  de coordonnées  $(x; y)$  telles que

$$0 \leq x \leq \alpha$$

et

$$g_{-3}(x) \leq y \leq h_{-3}(x).$$