Baccalauréat C groupe 4 [1] septembre 1979

EXERCICE 1 **3 POINTS**

Soit E un espace affine euclidien de dimension 3, orienté par le choix d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{\imath}\ ,\ \vec{\jmath}\ ,\ \vec{k}\right)$ et E l'espace vectoriel associé.
Soit F l'application de E dans E qui à tout point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ associe le point $M'\left(x'\ ;\ y'\ ;\ z'\right)$ tel que :

$$\left\{\begin{array}{l c r}x' & = & -y+1\\ y' & = & z-1\\ z' & = & -x+1\end{array}\right.$$

Montrer que F est un vissage dont on déterminera l'axe, le vecteur et l'angle par un couple de vecteurs le représentant.

EXERCICE 2 **3 POINTS**

Une urne contient 5 boules blanches, 2 boules noires et 3 boules rouges.

1. On extrait simultanément 3 boules. On admet l'équiprobabilité des tirages de chaque ensemble de 3 boules.
   a. Donner un espace probabilisé décrivant la situation.
   b. Calculer la probabilité des événements suivants :
      A : on obtient 2 boules blanches au moins
      B : on obtient 1 boule rouge au plus.
2. On extrait successivement 3 boules. On admet l'équiprobabilité des tirages de chaque triplet de boules. On examinera les deux types de tirages possibles (sans remise ; avec remise).
   a. Donner un espace probabilisé décrivant la situation.
   b. Calculer la probabilité de l'événement C suivant :
      C : on obtient une boule blanche au 1er tirage, une boule rouge au 2e tirage et une boule blanche au 3e tirage.

PROBLÈME **14 POINTS**

Partie A

1. a. Étudier les variations de la fonction numérique φ définie par :

$$\forall x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\quad \varphi(x) = \text{tg}x - x.$$

   b. En déduire les variations de la fonction numérique f définie par :

$$\forall x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\quad f(x) = \text{tg}x - x - \frac{x^3}{3}.$$

2. a. Étudier les variations de la fonction numérique ψ définie par :

$$\forall x \in \left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[,\quad \psi(x) = \text{tg}x - x\sqrt{2}.$$

   On désignera par α le réel unique de $\left]0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right[$ tel que :

$$\text{tg}\alpha = \sqrt{\sqrt{2}-1}.$$

1. Aix-Marseille - La Réunion

b. En déduire qu'il existe un réel unique β de l'intervalle $\left]\alpha\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que : $\psi(\beta) = 0$.

3. **a.** Étudier alors les variations de la fonction numérique g définie par :

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[, \quad g(x) = \text{tg}x - x - \frac{2x^3}{3}.$$

b. En déduire qu'il existe un réel unique γ de l'intervalle $\left]\beta\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[$ tel que : $g(\gamma) = 0$.

4. Montrer que $\dfrac{\pi}{3} \in]0\,;\,\gamma[$. (On donne $0,76 < \dfrac{2\pi^3}{81} < 0,77$).
En déduire que :

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{3}\right[, \quad x + \frac{x^3}{3} \leqslant \text{tg}x \leqslant x + \frac{2x^3}{3}.$$

5. Soit h la fonction numérique définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}_-, & h(x) = 1 \\ \forall x \in \left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[, & h(x) = \dfrac{\text{tg}\,x}{x} \end{cases}$$

a. h est-elle continue en 0 ?

b. Déduire de la question 1.4. un encadrement de h(t) pour t appartenant à [0, 1]. h est-elle dérivable en 0 ?

Partie B

1. Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \text{tg}t\,\text{d}t$.
Justifier l'existence de I et calculer I.
Déduire du A 4. un encadrement de I.

2. Soit $H = \displaystyle\int_0^1 h(t)\,\text{d}t$.
Justifier l'existence de H.
Donner un encadrement de H.

3. Soit Φ et Ψ les fonctions numériques définies par :

$$\begin{array}{lll} \forall x \in [0\,;\,1], & \Phi(x) = & \displaystyle\int_x^1 h(t)\,\text{d}t \text{ et} \\ \forall x \in]0\,;\,1], & \Psi(x) = & \displaystyle\int_x^1 \frac{\cos^2 t\text{Log}(\cos t) - t^2\text{Log}t}{t^2\cos^2 t}\,\text{d}t \end{array}.$$

Justifier l'existence des réels $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$.
En intégrant par parties de deux manières différentes $\displaystyle\int_x^1 h(t)\,\text{d}t$, en déduire une expression de $\Psi(x)$.

4. Soit σ la fonction numérique définie par :

$$\forall x \in \left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right], \quad \sigma(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$$

Définir les fonctions dérivées successives σ', σ'', σ''', σ''''.
Dresser le tableau de variation de σ''', σ'', σ', σ.
En déduire que :

$$\forall x \in]0\,;\,1], \quad 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Calculer les limites lorsque x tend vers 0 par valeurs positives des fonctions

$$x \longmapsto \frac{\mathrm{Log}\,(\cos x)}{x} \quad \text{et } \Psi.$$