Baccalauréat Amiens septembre 1979

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. Démontrer qu'il existe au moins deux entiers relatifs k et ℓ tels que :

$$13k - 23\ell = 1$$

Déterminer, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, deux de ces entiers.

2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation :

$$-156x + 256y = 24.$$

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = (x+1)\text{Log}\,|x+1| \quad \text{si } x \neq -1 \text{ et } f(-1) = 0.$$

1. Étudier la continuité et la dérivabilité de en -1.
Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) relativement à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. Montrer que (C) admet un centre de symétrie I.
2. Déterminer, lorsqu'elle existe, la dérivée de la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$F(x) = (x+1)^2\text{Log}\,|x+1|.$$

α étant un réel tel que $0 < \alpha < 1$, calculer l'aire $\mathcal{A}_\alpha$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = -1+\alpha$ et $y = 0$.
Montrer que cette aire admet une limite lorsque α tend vers 0 et interpréter ce résultat.

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté dont une base orthonormée directe est $\mathcal{B} = \left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ et un espace affine associé à E et rapporté au repère $\mathcal{R} = \left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A

Soit φ l'endomorphisme de E tel que :

$$\left\{\begin{array}{l}\varphi\left(\vec{\imath}\right) = -\dfrac{1}{2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})\\ \varphi\left(\vec{\jmath}\right) = \dfrac{1}{2}(\vec{\imath} - \vec{\jmath})\\ \varphi\left(\vec{k}\right) = \vec{k}\end{array}\right.$$

1. Dans $\mathcal{B}$, un vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées $(x~;~y~;~z)$ et son image $\varphi\left(\vec{V}\right)$ a pour coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$. Calculer x', y' et z' en fonction de x, y et z.
2. Montrer que le noyau de φ est la droite vectorielle Δ de base $\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ et que l'image de φ est le plan vectoriel P orthogonal à Δ.

3. **a.** Montrer que l'ensemble des vecteurs $\overrightarrow{V}$ de E tels que V et $\varphi\left(\overrightarrow{V}\right)$ soient linéairement dépendants est la réunion de trois droites vectorielles deux à deux orthogonales et dont l'une est Δ.

b. Quelle est la restriction, φ_1 de φ à P ?

4. Soit $\mathscr{B}' = \left(\overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}, \overrightarrow{k}\right)$ la base orthonormée directe-telle que

$$\overrightarrow{\imath'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overrightarrow{\imath} - \overrightarrow{\jmath}\right).$$

a. Déterminer $\overrightarrow{\jmath'}$, $\varphi\left(\overrightarrow{\imath'}\right)$ et $\varphi\left(\overrightarrow{\jmath'}\right)$.

b. Dans $\mathscr{B}'$, un vecteur $\overrightarrow{V}$ a pour coordonnées $(X~;~Y~;~Z)$ et $\varphi\left(\overrightarrow{V}\right)$ a pour coordonnées $(X'~;~Y'~;~Z')$. Calculer X', Y' et Z' en fonction de X, Y et Z.

c. Montrer que φ s'écrit $\varphi = \psi \circ \sigma = \sigma \circ \psi$ où σ est la symétrie vectorielle orthogonale par rapport au plan vectoriel P$'$ orthogonal à $\overrightarrow{\imath'}$, et ψ une projection vectorielle orthogonale à déterminer.

Partie B

On considère l'application f de $(\mathscr{E})$ dans $(\mathscr{E})$ qui à tout point M de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ dans $(\mathscr{R})$ fait correspondre le point M' de coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ dans $(\mathscr{R})$ défini par :

$$\left\{\begin{array}{l c l}
x & = & -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + 1\\
y & = & \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1\\
z' & = & z.
\end{array}\right.$$

1. Montrer que f est une application affine de $(\mathscr{E})$ dont l'endomorphisme associé est φ.

2. Quel est l'ensemble des points de $(\mathscr{E})$ invariants par f ?

3. **a.** Montrer que le plan $(\mathscr{P})$ passant par A$(1~;~1~;~1)$ et de direction P est globalement invariant par f.

b. Quelle est la restriction, f_1, de f au plan $(\mathscr{P})$?

c. Montrer que f s'écrit $f = s \circ p$ où s et p sont respectivement une symétrie orthogonale et une projection orthogonale à préciser.

d. Soit le repère $\mathscr{R}' = \left(\text{A}, \overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}, \overrightarrow{k'}\right)$. Calculer les coordonnées $\left(X'~;~Y'~;~Z'\right)$ de $M' = f(M)$ dans $\mathscr{R}'$ en fonction des coordonnées $(X~;~Y~;~Z)$ de M dans $\mathscr{R}'$.

4. Soit $(\mathscr{S})$ la sphère de centre A et rayon R et $(\mathscr{C})$ le cercle intersection de cette sphère avec le plan Q passant par A et dont la direction est orthogonale à i.

a. Quelle est, l'image de $(\mathscr{S})$ par f ?

b. Donner une représentation paramétrique de $(\mathscr{C})$ dans le repère $\left(\text{A}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ puis dans le repère $\mathscr{R}' = \left(\text{A}, \overrightarrow{\imath'}, \overrightarrow{\jmath'}, \overrightarrow{k'}\right)$.

c. Quelle est l'image de $(\mathscr{C})$ par f ? Vérifier que cette image est bien incluse dans l'image de $(\mathscr{S})$.

Faire une figure dans le plan $(\mathscr{P})$.