∾ Baccalauréat C Besançon juin 1983 ∾

EXERCICE 1 **4 POINTS**

1. On considère, dans l'ensemble $\mathbb{C}$, des nombres complexes, l'équation $z^3 - \text{i} = 0$.

   Donner chaque racine sous sa forme trigonométrique. Trouver la somme et le produit des deux racines qui ne sont pas imaginaires pures.
2. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 - \text{i} = 6(z + \text{i})$.

EXERCICE 2 **4 POINTS**

On considère une fonction numérique f définie et continue sur $[0~;~+\infty[$ et la fonction G définie sur $[0~;~+\infty[$ par $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t$.

1. Justifier rapidement que G est dérivable sur $[0~;~+\infty[$. À quoi est égal $G'(0)$?
2. **a.** On considère la fonction F définie sur $[0~;~+\infty[$ par

$$\left\{\begin{array}{l c l}F(x) & = & \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t = \dfrac{1}{x}G(x) \quad \text{si } x > 0\\ F(0) & = & f(0).\end{array}\right.$$

   Démontrer que F est continue sur $[0~;~+\infty[$. (Pour démontrer la continuité de F au point 0, on pourra utiliser le fait que G est dérivable en 0.)

   b. Démontrer que, sur $[0~;~+\infty[$, F est dérivable et exprimer $F'(x)$ pour $x > 0$.
3. Déterminer F dans les cas suivants :

$$f(t) = t\sin t \quad ; \quad f(t) = \dfrac{2t + \text{e}^t}{t^2 + \text{e}^t}.$$

PROBLÈME **12 POINTS**

Soit E l'espace vectoriel euclidien réel rapporté à la base orthonormé direct $\left(\vec{\imath}~,~\vec{\jmath}~,~\vec{k}\right)$.
Soit (H) l'ensemble des vecteurs de E dont les coordonnées vérifient :

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad \text{où} \quad \vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\,.$$

Partie A

1. Soit r la rotation vectorielle de E d'axe $\vec{k}$ et dont la restriction au plan vectoriel de base $\left(\vec{\imath}~,~\vec{\jmath}\right)$ a pour matrice dans cette base $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$.

   Exprimer x', y', z' de $r\left(\vec{v}\right)$ en fonction des coordonnées $(x~;~y~;~z)$ de $\vec{v}$ appartenant à E.
2. Soit s l'endomorphisme de E défini analytiquement dans la base $\left(\vec{\imath}~,~\vec{\jmath}~,~\vec{k}\right)$ par

$$\left\{\begin{array}{l c l}x' & = & ax + by\\ y' & = & bx - ay \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1\\ z' & = & z.\end{array}\right.$$

   Vérifier que s est une symétrie orthogonale par rapport à un plan contenant $\vec{k}$.

Partie B

1. **a.** Soit $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries vectorielles f conservant globalement (H). Montrer que l'image $f\left(\overrightarrow{V}\right)$ de coordonnées $\left(x'~;~y'~;~z'\right)$ d'un vecteur $\overrightarrow{V}$ de coordonnées $(x~;~y~;~z)$ de (H) est telle que $z' = z$ ou $z? = -z$.

   b. Soit P le plan d'équation engendré par $\overrightarrow{\imath}$ et $\overrightarrow{\jmath}$. Montrer que si f appartient à $\mathscr{I}$, f transforme un vecteur de P en un vecteur de P. En déduire que $f\left(\overrightarrow{k}\right)$ vaut $\overrightarrow{k}$ ou $-\overrightarrow{k}$.

2. $\mathscr{I}_1$ étant le sous-ensemble de $\mathscr{I}$ des isométries telles que $z' = z$, quelle est la nature des éléments de $\mathscr{I}_1$? (On pourra classer ces isométries suivant le sous-espace de leurs invariants).

3. Soit $\mathscr{I}_2$ le complémentaire de $\mathscr{I}_1$ dans $\mathscr{I}$.

   a. On appelle δ la symétrie orthogonale par rapport au plan $\left(\overrightarrow{\imath}~,~\overrightarrow{\jmath}\right)$. g étant une application quelconque de $\mathscr{I}_2$, donner les natures à priori possibles $\delta \circ g$. (On regardera à quoi est égal $\delta \circ g\left(\overrightarrow{k}\right)$.

   b. En déduire la nature des éléments de $\mathscr{I}_2$.

4. **a.** Montrer que $(\mathscr{I},~\circ)$ a une structure de groupe, $\circ$ étant la loi de composition des applications.

   Ce groupe est-il commutatif ?

   b. En est-il de même pour $(\mathscr{I}_2,~\circ)$?

Partie C

1. On considère l'application linéaire ψ de E dans E définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl}\psi\left(\overrightarrow{\imath}\right) & = & 2\overrightarrow{\imath} + \overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}\\ \psi\left(\overrightarrow{\jmath}\right) & = & \overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} + 2\overrightarrow{k}\\ \psi\left(\overrightarrow{k}\right) & = & 2\overrightarrow{\imath} + 2\overrightarrow{\jmath} + 3\overrightarrow{k}\end{array}\right.$$

   Vérifier que l'image de (H) par ψ est incluse dans (H).

2. Soit $\overrightarrow{V}$ de (H) à coordonnées entières. Que peut-on dire des coordonnées de $\psi\left(\overrightarrow{V}\right)$?

3. Montrer qu'il existe une infinité de points de (H) dont les coordonnées sont des entiers naturels strictement supérieur à 1.