∾ Baccalauréat Besançon septembre 1979 ∾

EXERCICE 1

Soient u, v et α trois nombres réels. On suppose que $0 < \alpha < 1$. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on affecte les quatre points

$$\text{A}_1 = (1\,;\,0) \quad ; \quad \text{A}_2 = (0\,;\,1) \quad ; \quad \text{A}_3 = (-1\,;\,0) \quad ; \quad \text{A}_4 = (0\,;\,-1)$$

respectivement des coefficients

$$m_1 = \alpha\cos^2\frac{u}{2}, \quad m_2 = (1-\alpha)\cos^2\frac{v}{2}, \quad m_3 = \alpha\sin^2\frac{u}{2}, \quad m_4 = (1-\alpha)\sin^2\frac{v}{2}.$$

1. Quelles sont les coordonnées de leur barycentre G ?
2. α étant fixé, on suppose que u et v varient de façon que $u + v = \dfrac{\pi}{2}$; Indiquer la nature géométrique de l'ensemble parcouru par le point G, et représenter graphiquement cet ensemble pour $\alpha = 1/2$ et $\alpha = 1/4$.

EXERCICE 2

On admettra que le nombre 1 979 est premier.
Les éléments de $\mathbb{Z}/1979\mathbb{Z}$ seront notés $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2}$, $\cdots$, $\overline{1978}$.

1. Résoudre dans Z/1979Z l'équation $\overline{2}x = \overline{1}$.
2. On considère l'équation

$$(1)\, x^2 - x + \overline{494} = \overline{0}.$$

   Si x est solution de (1), calculer $\left(x - \overline{990}\right)^2$.
   En déduire les solutions de (1).

PROBLÈME

Dans l'espace vectoriel des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, on considère le sous-espace vectoriel E engendré par les fonctions u_1, u_2, u_3 définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par les formules :

$$\left\{\begin{array}{l c l} u_1(x) & = & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{e}^{-x};\\ u_2(x) & = & \text{e}^{-x}\cos x;\\ u_3(x) & = & \text{e}^{-x}\sin x.\end{array}\right.$$

Si f et g appartiennent à E, on pose :

$$< f,\ g >= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\text{e}^{2t}\,\text{d}t.$$

Partie A

1. Calculer les six intégrales $< u_1,\ u_2 >$; $< u_1,\ u_3 >$; $< u_2,\ u_3 >$; $< u_1,\ u_1 >$ $< u_2,\ u_2 >$; $< u_3,\ u_3 >$.
2. Montrer que l'application qui, à tout couple $(f,\ g)$ d'éléments de E, associe le nombre $< f,\ g >$, est un produit scalaire sur E, et que $(u_1,\ u_2,\ u_3)$ est une base orthonormée de l'espace euclidien E ainsi défini.

   Dans la suite du problème, cette base sera considérée comme directe, ce qui oriente l'espace E.

Partie B

Soit D l'application qui, à tout f appartenant à E, associe la fonction $Df = f'$ dérivée de f.

1. Montrer que D applique E dans E.
2. Est-ce que D est une isométrie de E ?

Partie C

1. Soit h un nombre réel donné. Soit $f = au_1 + bu_2 + cu_3$ un élément quelconque de E, où a, b, c sont des nombres réels.
   Montrer que la fonction $x \longmapsto g(x) = f(x-h)$ peut s'écrire
   $g = a'u_1 + b'u_2 + c'u_3$, où a', b', c' sont trois nombres réels qu'on calculera en fonction de a, b, c et de h.
2. On a ainsi défini une application linéaire T_h de E dans E, celle qui transforme f en g.
   Montrer que T_h est la composée d'une homothétie vectorielle, dont on précisera le rapport, et d'une rotation de E, dont on précisera les éléments.

Partie D

1. Calculer les trois intégrales
   $$v_i(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} u_i(t)\,\mathrm{d}t$$
   où $i = 1, 2, 3$.
   (Nota Bene : pour calculer v_2 et v_3 on pourra intégrer deux fois par parties).
2. En déduire que, pour tout f appartenant à E, la fonction
   $$x \longmapsto F(x) = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\,\mathrm{d}t$$
   appartient à E.
   On note L l'application linéaire de E dans E qui transforme f en F.
3. Soit P le plan vectoriel engendré dans E par u_2 et u_3. Quelle est l'image de P par L ?
4. Montrer que l'application L est bijective de E sur E.