

∞ Baccalauréat C Bordeaux juin 1979 ∞

EXERCICE 1

4 POINTS

Trouver les couples (a, b) d'entiers naturels ($0 < a < b$) dont le plus grand commun diviseur d et le plus petit commun multiple m vérifiant

$$2m + 3d = 78$$

et tels que a ne divise pas b .

EXERCICE 2

5 POINTS

L'espace affine euclidien orienté E de dimension trois est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par Δ la droite de E , dirigée par \vec{i} , passant par le point A de coordonnées $(0; 0; 1)$ et par R la rotation d'axe Δ qui transforme le point O en le point O' de coordonnées $(0; -1; 1)$.

Trouver les coordonnées $(x_1; y_1; z_1)$ du point M_1 transformé d'un point M de coordonnées $(x; y; z)$ par la rotation R .

On désigne par T la translation de vecteur $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et par V la transformation composée $V = T \circ R$.

Trouver les coordonnées $(x_2; y_2; z_2)$ du point M_2 transformé d'un point M de coordonnées $(x; y; z)$ où $M_2 = V(M)$.

Préciser la nature et les éléments caractéristiques de l'application V .

PROBLÈME

12 POINTS

Partie A

On désigne par a, h, t, x des nombres réels.

1. Déterminer trois constantes réelles A, B et C telles que, quel que soit $t > 0$:

$$\frac{1}{t(1+t)^2} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(1+t)^2} + \frac{C}{1+t}.$$

2. Déterminer trois constantes réelles A', B' et C' telles que, quel que soit $t > 0$:

$$\frac{-1}{t^2(1+t)} = \frac{A'}{t^2} + \frac{B'}{t} + \frac{C'}{1+t}.$$

3. Pour $0 < a < b$, justifier l'existence des intégrales :

dt

$$I(a, b) = \int_a^b \frac{1}{t(1+t)^2} dt \quad J(a, b) = - \int_a^b \frac{1}{t^2(1+t)} dt.$$

Montrer que $I(a, b) \geq 0$ et $J(a, b) \leq 0$.

Calculer $I(a, b)$ et $J(a, b)$.

4. Le nombre réel $a > 0$ étant fixé, montrer que $I(a, b)$ et $J(a, b)$ tendent vers des limites réelles $F(a) = \lim_{b \rightarrow +\infty} I(a, b)$ et $G(a) = \lim_{b \rightarrow +\infty} J(a, b)$ quand b tend vers $+\infty$ telles que : $G(a) \leq 0 \leq F(a)$.

Partie B

Dans la suite du problème on pose, pour $x > 0$:

$$F(x) = \log \frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x}$$

$$G(x) = \log \frac{1+x}{x} - \frac{1}{x}$$

où \log désigne la fonction logarithme népérien.

1. Soit θ l'application de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R} qui à x associe « $(1+x) - x$.
Du signe de $\theta'(x)$ et de la valeur de $\theta(0)$ déduire que $\theta(x) < 0$ pour $x > 0$. (θ' désigne la dérivée de θ).
Soit φ l'application de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R} qui à x associe $\log(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.
Du signe de $\varphi'(x)$ et de la valeur de $\varphi(0)$ déduire que $\varphi(x) > 0$ pour $x > 0$. (φ' désigne la dérivée de φ).
Prouver alors que, pour tout $x > 0$: $-\frac{1}{2x^2} < G(x) < 0$.
2. Soit ψ l'application de \mathbb{R}_+ vers \mathbb{R} qui à x associe $\log(1+x) - \frac{x}{1+x}$.
Étudier le signe de ψ pour $x > 0$ et en déduire que $F(x) > 0$ pour $x > 0$.
3. Montrer que, quel que soit $x > 0$,

$$F(x) - G(x) < \frac{1}{x^2} \quad \text{et} \quad 0 < F(x) < \frac{1}{x^2}.$$

4. Des inégalités $G(x) < 0 < F(x)$, déduire que, pour tout $x > 0$

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}.$$

Partie C

1. Soit α un nombre réel supérieur ou égal à 1. Montrer que

$$\text{a. } 0 \leq \int_1^\alpha F(x) dx \leq 1.$$

$$\text{b. } \frac{1}{2} \leq \int_1^\alpha G(x) dx \leq 0.$$

2. Calculer $K(\alpha) = \int_1^\alpha F(x) dx$.
(On pourra intégrer par parties). En déduire $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} K(\alpha)$.
3. Calculer $L(\alpha) = \int_1^\alpha G(x) dx$ et déterminer $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} L(\alpha)$.